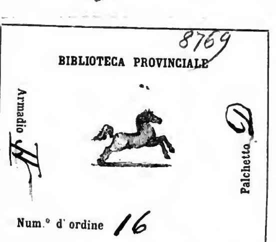
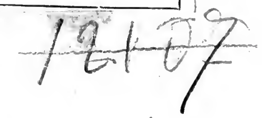



FONDO PROVINCIA


8769
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine 16




NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
2086
NAPOLI



COURS

DE

STATIQUE.

COURS
DE STATIQUE

OU

SCIENCE DES FORCES

DONT LES EFFETS SUR UN MÊME SYSTÈME
SE DÉTRUISENT RÉCIPROQUEMENT,

PAR

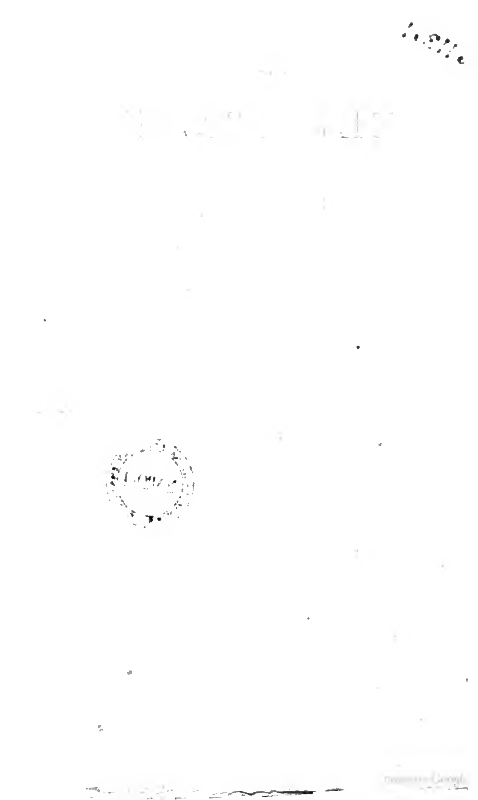
Mr. G. Dandelin,

PROFESSEUR D'EXPLOITATION A L'ÉCOLE DES MINES DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET OFFICIER DU GÉNIE MILITAIRE, MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES ET DE LA SOCIÉTÉ GRAND-DUCALE DE MINÉRALOGIE DE JÉNA, etc. etc.





LIÉGE,
H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE.
1830.



STATIQUE,

OU

SCIENCE DES FORCES

DONT LES EFFETS SUR UN MÊME SYSTÈME, SE DÉTRUISENT RÉCIPROQUEMENT.

PREMIÈRE LEÇON.

Sur quelques propriétés générales des corps ; définitions des mots forces, vitesse, masse ; théorème de la composition des vitesses et des forces, parallélogramme et parallépipède des forces.

1. La première des propriétés que nous remarquions dans les corps de la nature, c'est la faculté qu'ils ont de se déplacer, et de prendre les uns par rapport aux autres des positions différentes. Cette propriété qui se nomme *locomotilité* se manifeste aux yeux par un phénomène que l'on appele *mouvement ;* d'où est venue cette définition des corps : *les corps sont tout ce qui dans la nature est susceptible de mouvement.*

2. La cause qui produit le mouvement nous est encore et nous sera probablement toujours inconnue;

néanmoins comme le mouvement des corps se fait toujours avec les mêmes circonstances, on est assez généralement convenu et avec raison à considérer cette cause comme la même quelque soit le corps sur lequel elle agit.

Nous verrons d'ailleurs que sa nature est absolument indifférente à la matière que nous avons à traiter; nous nous contenterons donc d'ajouter que cette cause quelle qu'elle soit a reçu le nom de *force*. Ainsi la force est la cause qui produit le mouvement des corps.

Quoique cette cause soit encore inconnue, cependant on peut prouver qu'elle est de la même nature que la pesanteur, c'est-à-dire, cette force qui entraine vers la terre les corps enlevés de sa surface; en effet, il n'y a point de mouvement qui ne puisse être produit par la force de l'homme, et d'un autre côté, nous voyons tous les jours des opérations qui prouvent invinciblement, l'identité de cette force avec la pesanteur. Ainsi par exemple quand on soulève un mouton pour l'abandonner ensuite à son poids, le mouvement qu'il prend n'est que l'inverse de celui qu'on lui a d'abord donné et on conçoit qu'il est possible de s'arranger de manière à ce que tous les deux se fassent avec les mêmes circonstances. Donc la force de l'homme est identique avec la pesanteur, et par suite celle-ci avec toutes les causes de mouvement.

Quoiqu'il en soit dans un corps en mouvement

on observe principalement deux choses, la vitesse et la masse du corps.

3. La vitesse est exprimée par la longueur du chemin parcouru par le corps dans une fraction de tems donnée, par exemple une seconde : ainsi l'on dit que la vitesse d'un corps est de deux mètres par seconde, quand dans cet espace de tems le corps s'est éloigné de deux mètres de sa première position. Vous aurez observé sans doute des corps en mouvement dont toutes les parties n'ont pas la même vitesse : ainsi la roue d'une voiture présente un assemblage de corps dont les vitesses sont très-différentes : les points qui sont au-dessus du moyeu, par exemple, avancent plus vite que le moyeu, tandis que ceux qui sont au-dessous vont plus lentement dans le sens du mouvement de la voiture. Les circonstances qui accompagnent ces mouvemens compliqués sont pour la plupart du domaine d'une science difficile dont nous traiterons plus tard les parties les plus abordables.

Pour le moment nous ne nous occuperons que des corps dont les vitesses ont lieu suivant des lignes parallèles et sont toujours les mêmes pour des tems égaux. Ce genre de mouvement dont l'aiguille d'une montre bien réglée peut vous donner l'idée, s'appele mouvement uniforme : c'est celui que vous remarquez dans la plupart des pièces qui composent les machines.

4. Nous venons de dire (3) que les vitesses

s'estiment par l'espace parcouru par les corps pendant un tems déterminé, pris pour unité de mesure; ainsi le même corps pourra avoir des vitesses doubles, triples d'une autre vitesse selon, qu'il parcourra un espace double ou triple de la première vitesse. Ceci vous fait voir de suite que les vitesses se comportent comme d'autres quantités, c'est-à-dire, peuvent s'augmenter et diminuer dans des rapports évaluables en nombres. C'est là le grand avantage qui résulte de l'adoption d'une mesure commune de tems, et c'est ce qui a décidé les hommes à perfectionner, autant que possible, les moyens d'obtenir les divisions du tems avec une grande exactitude. Vous avez vu dans notre leçon d'introduction les bases sur lesquelles on s'est établi pour arriver à ce but.

Quand on voit un même corps se mouvoir successivement avec des vitesses plus grandes et plus petites, il est assez naturel de penser que la force qui cause le mouvement subit elle-même des altérations. Ainsi un corps A se mouvant avec une vitesse V, doit naturellement présenter à l'idée une cause de mouvement moitié de celle qui aurait fait marcher le corps A avec une vitesse 2V. Cette idée conduit à admettre que les forces sont ici proportionnelles aux vitesses, et cette conséquence est tellement évidente, que vous entendez tous les jours dire par les personnes qui y ont le moins réfléchi, qu'un corps est animé de telle ou telle

vitesse, au lieu d'être animé par telle ou telle force, tant ce rapport des vitesses et des forces est vivement perçu par notre intelligence. Je ne m'arrêterai donc pas à vous démontrer ce qui peut être reçu comme un axiome, et nous admettrons que pour un corps donné, les *forces peuvent être représentées par les vitesses*, ce qui nous donnera un moyen sinon d'évaluer absolument les forces, au moins d'établir entre elles les relations de grandeurs qui nous sont nécessaires.

5. Non seulement à un corps on peut donner des vitesses différentes, mais, ce qui est bien remarquable, on peut à la fois lui en donner plusieurs, différentes de direction et de grandeur, et dans ce cas il en résulte pour le corps une vitesse qui n'est en général ni l'une ni l'autre de celles qui contribuent à la produire.

Ainsi, par exemple, dans un bateau, vous voyez les mariniers porter en tous sens des corps servant à la manœuvre, tandis que le bateau entraîné par sa vitesse particulière, la communique en même tems à tous les corps qu'il contient ou qu'il supporte, et par conséquent à ceux dont nous venons de parler. Alors l'œil suffit pour appercevoir que la route que prennent ces divers corps se distingue manifestement de celle qu'ils auraient affectée si l'une des deux causes de mouvement avait cessé d'exister.

On voit encore un exemple de cette combinaison

des vitesse dans ce qui se passe lorsqu'un nageur traverse un fleuve rapide : malgré sa vigueur et son habilité, s'il se dirige toujours perpendiculairement vers la rive qu'il veut atteindre, il arrivera infailliblement au-dessous de son point de départ : c'est que dans ce cas, outre la vitesse qu'il tend à acquérir par la force de ses muscles, il en reçoit une autre par l'impulsion du courant du fleuve ; de ces deux vitesses, l'une tend à le conduire à son but, l'autre à l'entraîner dans le sens du fil d'eau ; ni l'une ni l'autre n'obtient son effet et le nageur acquiert une vitesse composée qui diffère à la fois des deux composantes.

6. Une circonstance bien remarquable qui résulte quelquefois de l'action des vitesses composées, c'est l'état de repos : lorsqu'un bateau marche dans le sens de la poupe à la proue, il n'est pas rare qu'un des hommes de l'équipage ait à marcher au contraire de la proue à la poupe, c'est-à-dire, en sens contraire du mouvement du bateau. Dans ce cas, si sa vitesse est égale à celle du bateau, il est infaillible que chaque fois que le bateau parcourra un mètre dans le sens de sa vitesse, l'homme en fera un autre en sens contraire. Le point X qu'il occupait se sera éloigné d'un mètre de sa position primitive, mais le marin se sera éloigné d'un mètre du point X, en sorte qu'il se sera replacé à sa première position : il résulte de là que tant que notre hypothèse aura lieu, le marin ne bougera pas de sa place. C'est ce

qui produit quelquefois une illusion singulière lorsqu'on se trouve près d'un batiment qui serre les murs d'un quai avec rapidité : il arrive souvent alors que des bateliers, marchent pour la manœuvre de la proue à la poupe, avec une vitesse si approchante de celle du vaisseau, que leur position par rapport au spectateur immobile ne change pas : comme cependant on voit dans le marin tout l'appareil du mouvement musculaire, l'imagination change l'état véritable des choses, et accoutumée à ne pas séparer les idées du mouvement des jambes et de celui de translation qui en résulte, bientôt elle représente le vaisseau immobile, tandis que le spectateur voit marcher le quai, les maisons et se sent entrainé lui-même par un mouvement fantastique et mensonger.

Ce singulier état d'un corps sollicité par deux vitesses ou deux forces et néanmoins restant en repos apparent, nous fait concevoir dans les corps une nouvelle manière d'être, c'est *l'équilibre*, c'est-à-dire, cette situation où un corps peut tendre à se mouvoir dans une certaine direction sans pourtant cesser d'être immobile : il est bien essentiel de distinguer cet état de celui du repos absolu ; ici l'application seule d'une force pourrait produire le mouvement, là on peut le produire en détruisant une force, ou en soustrayant le corps à son effet.

La science qui traite des forces ou des vitesses qui tiennent un corps en équilibre s'appelle *Statique :*

c'est celle dont nous allons nous occuper; mais il faut auparavant que nous ayons des moyens de comparer les forces qui peuvent le produire, non seulement quand elles agissent sur des corps égaux et homogènes comme nous l'avons supposé jusqu'ici, mais encore sur des corps quelconques; car pour donner de la généralité à nos recherches, il faut que leurs conclusions embrassent le système entier des corps de la nature, qui présente de si grandes variétés de forme et de matière.

7. Pour cela il faut faire entrer dans nos considérations la *masse* des corps, en définissant ce qu'on entend par cette expression, et en examinant son influence sur les phénomènes du mouvement.

Les corps, même ceux qui paraissent le plus homogènes, ne le sont point : il ne faut pour en être convaincu que connaître deux de leurs propriétés les plus générales, la *divisibilité* et la *porosité*.

La divisibilité est la propriété dont jouissent tous les corps de se séparer par divers moyens mécaniques en un nombre plus ou moins considérable de parties plus ou moins petites : c'est ainsi que vous voyez tous les jours au moyen de la lime, du ciseau et de la scie, réduire le fer, la pierre et le bois, en parcelles, en éclats et en lames, tantôt plus grandes, tantôt plus petites, selon le besoin des arts : l'usage même dans lequel nous sommes de voir à chaque instant des applications de cette propriété, nous y a si bien accoutumé qu'il nous est

extrêmement difficile de concevoir l'existence d'un corps, tel petit qu'il soit, qui serait indivisible. C'est à la divisibilité qu'est due la faculté des corps de se rompre, et, si vous y réfléchissez, vous verrez que la plupart des arts mécaniques ont pour but la division de certains corps, ou la recomposition des parties obtenues par de semblables divisions.

La porosité est une autre propriété des corps dont l'observation, jointe à celle des précédentes, va nous conduire à un important résultat : il n'y a personne de vous qui n'ait vu en plongeant un morceau de sucre dans l'eau, cette dernière substance pénétrer dans le sucre en quantité assez considérable sans en altérer, du moins sensiblement, la forme extérieure; un effet analogue a lieu pour le sel exposé à l'action d'une atmosphère humide; on observe fréquemment que l'huile traverse le papier le plus épais, et lorsqu'on comprime fortement l'eau dans les conduits en cuir d'une pompe à incendie, on la voit filtrer à travers les pores du tuyau, et se déposer à sa surface en forme de rosée; on est même parvenu à faire traverser une lame d'or à ce liquide au moyen d'une forte pression. Toutes ces circonstances dans lesquelles un corps pénètre ainsi dans un autre sans changer l'état solide de celui-ci et de manière à se mêler à sa substance, conduisent à penser que les corps sont composés de parties plus ou moins grandes laissant entr'elles des vacuoles ou intervalles assez considé-

rables pour que les parties d'autres corps puissent s'y glisser et produire ainsi les phénomènes dont nous venons de parler : on a donné à ces parties le nom de *molécules* ou de *particules*, ce qui, en physique, ne veut pas précisément dire la même chose, mais cela est assez indifférent pour notre objet où la nature et la forme de ces parties n'influe pas de manière à altérer nos résultats.

Vous auriez pu croire qu'il n'était pas nécessaire de considérer les corps sous l'aspect que je viens de vous présenter, et qu'il suffirait d'imaginer leur forme intérieure comme analogue à celle d'une éponge pour expliquer la porosité, mais la divisibilité exclut cette supposition, puisque la rupture des parties pleines de cette éponge ne peut s'admettre, à moins de les supposer elles-mêmes composées, ce qui revient toujours à notre principe : ainsi nous sommes dans la nécessité de concevoir les corps comme des assemblages de petits solides ou de petites boules qui tiendraient ensemble par un lien invisible et dont nous connaîtrons plus tard la nature.

8. Quelque soit au reste la forme de ces molécules, il en résulte pour les corps qu'elles composent des différences extérieures sensibles, dont la plus importante est la différence de poids sous un volume donné.

Vous savez tous, en effet, qu'il faut plus d'effort pour soulever l'équivalent du volume d'un litre en plomb que le même volume de fer ou de cuivre

ou d'eau. Soit que cette différence vienne de ce que les molécules également pesantes sont plus rapprochées dans quelques corps que dans d'autres, soit que leur distance soit la même et que leur pesanteur diffère, soit peut-être l'accord de ces deux causes, le fait n'existe pas moins, et on s'accorde à l'expliquer en admettant que la forme et la disposition des molécules d'un corps lui permet de renfermer sous un volume donné plus ou moins de matière pesante, la seule d'ailleurs que nous puissions concevoir.

Cette quantité absolue de matière renfermée dans un corps se nomme la masse de ce corps : le rapport entre cette masse et le volume du corps se nomme sa *densité*, quantité qui reste constante tant que la nature du corps ne change pas.

Or, maintenant pour savoir quelle est l'influence de la masse sur la force dans l'état de mouvement du corps, nous n'avons qu'à observer que quand un corps se meut de manière à ce que toutes ses molécules décrivent des lignes parallèles, chaque molécule a la même vitesse que ce corps, en sorte que s'il y a M molécules dans ce corps et qu'il ait la vitesse V due pour chaque molécule à une force F, il y aura pour tout le corps autant de forces F qu'il y a de molécules, c'est-à-dire, M, en sorte que la force totale sera $M \times F$.

Mais M est proportionnel à la masse du corps, puisqu'il désigne le nombre absolu des molécules

qu'il contient et pour la même vitesse F est toujours le même, d'où il suit que pour une vitesse donnée, la force doit être proportionnelle à la masse du corps.

Mais, si on veut donner à ce même corps une autre vitesse, il faudra que la nouvelle force soit à la première comme la nouvelle vitesse est à la vitesse V, donc, pour donner à ce corps une vitesse quelconque, il faudra proportionner la force d'abord à sa masse et encore à sa vitesse, ce qui s'exprime en disant que la force qui fait mouvoir un corps est proportionnelle à sa masse multipliée par sa vitesse.

Ce raisonnement ne s'applique à la vérité qu'aux corps de même nature; mais il ne sera pas difficile de l'étendre à tous les corps possibles en concevant, par la pensée, les molécules de deux corps hétérogènes divisés en parcelles égales pour l'un et l'autre des deux corps : ces parcelles se trouvant homogènes et de même volume pour les deux corps, le raisonnement précédent leur devient rigoureusement applicable et généralise notre conclusion.

9. Nous avons donc maintenant un moyen de comparer toutes les forces quand elles produisent du mouvement en examinant deux élémens faciles à apprécier, l'un le poids absolu du corps mobile, l'autre sa vitesse, c'est-à-dire, l'espace parcouru pendant un tems donné.

Maintenant ayant admis ces notions, il nous est facile de voir que pour pousser plus loin nos recher-

ches sur l'équilibre et le mouvement des corps soumis à de certaines forces, il faut examiner l'action de ces forces sur les élémens qui les composent et par suite, il est naturel de commencer par l'équilibre des forces qui agissent sur un point matériel.

10. Pour cela considérons un point matériel, c'est-à-dire, une sphère infiniment petite, et cherchons quelle est la direction que prendra cette sphère ou ce point en la supposant animée de deux vitesses différentes par leur direction et leur grandeur. Le plus difficile est de bien concevoir l'état d'un semblable point ; la conclusion, comme vous le verrez, en est facile.

Imaginez un plan matériel horizontal PP, et sur ce plan un point mobile M qui se meut suivant la ligne droite MB avec une vitesse telle que dans chaque seconde il parcoure la longueur $MA_{\prime}$: rien ne sera changé par rapport aux relations de ce point avec le plan matériel, si vous donnez à celui-ci un mouvement quelconque dans lequel il reste horizontal ; ainsi donc, vous pouvez supposer que ce plan se meuve de manière à ce que tous ses points suivent des routes parrallèles à une droite quelconque Mb'' ; on peut en outre supposer que la vitesse commune à tous les points de ce plan soit telle que l'espace que le point M parcourrait par seconde, s'il était fixe sur le plan, serait égal à Ma'. Remarquez que dans tout ce que nous venons de dire $MA_{\prime}$ et Ma' sont arbitraires soit pour la longueur

soit pour la direction, en sorte que nos conséquences seront applicables à tous les cas.

Si vous examinez bien ce qui se passe dans ce double mouvement, vous verrez facilement que, quelque soit la position du point M sur le plan, il sera toujours entraîné par celui-ci dans un sens parallèle à M*b* et avec une vitesse égale à celle du plan, tandis, que, d'une autre part, son mouvement le long de la ligne MB ne cessera pas d'avoir lieu : il aura donc véritablement deux vitesses à la fois, l'une proportionnelle et parrallèle à MA, l'autre proportionnelle à M*a*. Examinons maintenant ce qui se sera passé au bout d'une seconde de tems.

D'abord le plan aura parcouru l'espace M*a'*, parallèlement à cette droite, ainsi la droite $MB_{,}$ se sera transportée parrallèlement à elle-même, dans la position *a*M', le point mathématique M étant venu se placer en *a'* : en outre le point matériel aura parcouru sur la ligne $MB_{,,}$ un espace égal à $MA_{,}$, et, comme il ne quitte pas cette ligne dans le mouvement du plan, il sera venu se placer sur sa nouvelle position en M' à une distance du point A' égale à M*a'*. Si donc, vous menez la droite MM', vous formerez un parallélogramme dont les côtés $Ma_{,}$ et MA' représenteront en grandeur et en direction les deux vitesses du point matériel M, et dont la diagonale MM' représentera la route véritable suivie en vertu de ces deux vitesses par ce point pendant une seconde, et, par conséquent, indiquera

en grandeur et en direction la vitesse avec laquelle il se mouvra pendant ce tems en vertu des deux vitesses simultanées que nous lui avons supposées.

Si on voulait savoir où se trouve ce point au bout de deux secondes, vous voyez que l'on n'aurait qu'à faire pour le point m la même opération et le même raisonnement que pour le point M, et qu'ainsi en formant le parallélogramme M'B'M''b' dont les côtés représenteraient les directions et les grandeurs des deux vitesses du point M', et que la direction ainsi que la grandeur de la vitesse résultante serait représentée par la diagonale M'M'' de ce parallélogramme.

Mais vous voyez facilement que cette position du point mobile serait également obtenue en prolongeant les premiers côtés MA', $Ma_{,}$, et en prenant sur leur direction deux longueurs doubles respectivement des longueurs MA', $Ma_{,}$ pour former le parallélogramme MBM''b dont la diagonale passerait visiblement par le point M', et représenterait l'espace parcouru par le point mobile M, pendant deux secondes.

Il vous sera facile de généraliser encore cette conclusion, et d'en déduire enfin celle-ci (fig. 2).

Lorsqu'un point matériel M *est doué à-la-fois de deux vitesses, pour connaître la route qu'il aura suivie dans un tems donné, à partir d'un point connu, faites passer par ce point deux lignes* MA, MB *qui indiquent chacune la route qu'il aurait*

suivie s'il n'avait eu que l'une ou l'autre des deux vitesses, puis construisez sur ces deux lignes un parallélogramme MAmB; *le point* m *sera la position qu'occupera au bout de ce tems le point matériel, et la diagonale* Mm *sera le chemin qu'il aura pris pour y parvenir.*

11. Or, si nous remontons à ce que nous avons dit des vitesses, qu'elles sont proportionnelles aux espaces parcourus pendant un même tems, nous voyons que les deux vitesses composantes sont représentées par MA et MB, et que Mm représente la direction et la grandeur de la vitesse résultante; delà cet autre théorême :

Lorsqu'un point matériel est entraîné par deux vitesses simultanées, construisez un parallélogramme sur deux lignes qui, passant par ce point, représenteront en grandeur et en direction ces deux vitesses et la diagonale représentera en grandeur la vitesse résultante de l'action simultanée des deux autres.

12. Enfin, comme les forces qui produisent les vitesses sont pour un même corps proportionnelles à ces vitesses, le théorême précédent peut se changer en celui-ci, connu sous le nom de théorême du *parallélogramme des forces* :

Si deux forces P *et* Q (fig. 3) *représentées en grandeur et en direction par les droites* MP *et* MQ *sollicitent à-la-fois un point matériel* M, *ces deux forces produisent l'effet d'une force unique* R *qui sera représentée en grandeur et en direction par la*

diagonale MR *du parallélogramme* MPRQ *construit sur les deux droites précédentes.*

Ce théorême donne le moyen de trouver ainsi la force capable de représenter deux autres forces données; une telle force se nomme la *résultante* des deux premières et celles-ci se nomment les *composantes* de la troisième.

Non-seulement par ce théorême on peut trouver la résultante de deux forces données, mais on peut aussi s'en servir pour trouver les valeurs des composantes d'une force donnée, lorsqu'on connaît la direction de ces composantes; ainsi, la force R étant connue ainsi que les directions MP et MQ, il sera facile de déterminer les valeurs de P et de Q en menant les droites RP et RQ parallèles aux lignes données, et l'on aura en MP et MQ les valeurs des forces cherchées P et Q.

Ce théorême sert en outre de base à la théorie de l'équilibre d'une foule de machines où l'homme a trouvé le moyen de neutraliser avec une très-petite force une force beaucoup plus considérable, en se servant de l'aide d'un appui fixe; il ne s'agit en effet dans cette circonstance, que de disposer la petite force par rapport à la grande, de manière à ce que leur résultante passe par le point d'appui; son effet et, par conséquent, celui des deux forces composantes est détruit par l'immobilité de l'appui et l'équilibre est établi. Or, pour déterminer ainsi la force arbitraire, nous voyons qu'il faudra avoir

recours au parallélogramme des forces. Nous verrons plus tard plus d'un exemple intéressant de ces applications. Je me contenterai pour le moment d'en citer un seul.

Dans les constructions, il arrive souvent qu'on est obligé d'élever au moyen de cordages, des corps d'un poids considérable, des pierres particulièrement : comme le point d'appui du cordage est ordinairement une charpente qui ne se maintient que par son poids ou par une liaison passagère et peu solide avec le reste de l'édifice, il est important, pour des raisons que nous développerons plus tard, de donner à ce point d'appui, la saillie la moins considérable possible en dehors de l'édifice; dans ce cas, la pierre en rasant le parement extérieur, pourrait y commettre du dommage, sur-tout si ce parement présente des corniches, des moulures ou des objets faciles à entamer : alors (fig. 4) un ouvrier placé en A engage une corde dans les ligamens qui soutiennent le fardeau M et le tire à lui en l'écartant de la verticale; dans ce cas, si P est le poids de la pierre et Q la force de l'homme, on trouvera leur résultante en formant le parallélogramme MPRQ dont les côtés MP et MQ représentent les forces P et Q et en construisant sa diagonale. Or, on voit que si cette résultante passe par le point fixe F, l'équilibre sera établi; donc, il faut que la diagonale du parallélogramme passe par ce point. Cette condition détermine le rapport des forces Q et P et

il est facile de voir que la première sera d'autant plus petite, la seconde restant la même, que le côté MQ sera plus court, ce qui arrive d'autant plus que l'angle QMP est plus grand par rapport à l'angle RMP; mais comme la pesanteur P est verticale, cette conclusion aboutit à dire qu'il faudra d'autant moins d'effort en Q pour écarter le fardeau M de la muraille, que la ligne AM approchera plus de l'horizontale, en même tems que la ligne FM se rapprochera également plus de la verticale. Ce résultat se vérifie tous les jours par l'expérience, et une construction géométrique fort simple, puisqu'elle n'est autre qu'une modification du théorème que nous avons donné, pourrait, pour une position connue de l'homme et du fardeau, déterminer rigoureusement la valeur de la force Q.

Vous voyez cependant ce qu'est aux arts l'application des sciences exactes. A peine entrons-nous dans la route que nous avons à suivre, que déjà d'importantes vérités se manifestent. Des faits dont vous aviez auparavant une conception obscure et incertaine se présenteront à votre intelligence sous un nouveau jour : un seul pas fait avec la lumière que nous prête la géométrie, nous ouvre déjà un nouvel horizon et de nouvelles vues, et ce pas encore est bien peu de chose; tant il est vrai que la pratique, faute de locutions propres et des raisonnemens qui lui conviennent, ne fait, en parcourant de longs chemins, que d'aller et venir dans un labyrinthe entortillé et d'une surface bien restreinte.

13. Lorsque l'on sait trouver la résultante de deux forces, il est bien facile de trouver celles d'autant de forces que l'on voudra appliquées à un point et agissant dans un même plan : en effet, on composera d'abord la première de ces forces avec la seconde; on composera ensuite la résultante obtenue avec la troisième des forces données et on aura la résultante des trois premières forces; et, en allant ainsi de suite, on remplacera toutes les forces par une seule qui sera la résultante totale : voici l'application de ce que nous venons de dire (fig. 5).

Soient les forces P, Q, R, S, appliquées sur le point M, et représentées respectivement par les longueurs et les droites PM, QM, RM et SM. Composons d'abord les forces P et Q : pour cela formons le parallélogramme PMQP′, sa diagonale MP′ représentera la grandeur et la direction d'une force P′, qui peut remplacer l'action des forces P et Q, ainsi il ne nous restera que les forces P′, R et S.

Composons maintenant les forces P′ et R; pour cela formons encore le parallélogramme MP′Q′R, sa diagonale représentera en direction et en grandeur la résultante Q′ de P′ et de R, et il ne restera plus que les forces Q′ et S.

Pour réduire encore celles-ci à une seule force, il faudra former le parallélogramme MQR′S, dont la diagonale MR′ représentera en grandeur et en direction la résultante R′ des forces Q′ et S, et, par conséquent, celle de toutes les forces P, Q, R, S qui agissaient sur le même point M.

Il résulte delà plusieurs choses importantes :

1°. D'abord, quelque soit le nombre des forces qui agissent sur un point, elles sont toujours réductibles à une seule qu'on pourra considérer comme leur résultante totale.

2°. Si l'on examine bien (fig. 5) la construction qui nous a conduit à déterminer cette résultante, on verra d'abord que la ligne MP représente la force P ; que la ligne PP′ est égale à MQ et par conséquent qu'elle représente la force Q ; que la ligne P′Q′, de même, représente la force R, que la ligne Q′R′ représente la force S, et qu'enfin la ligne MR′ représente la résultante : ces cinq lignes forment un polygone fermé, et il ne sera pas difficile de conclure de ce que nous voyons, le théorème suivant dû à Leibnitz, un des hommes qui ont le plus honoré la science :

Pour trouver la résultante de tant de forces qu'on voudra supposer appliquées à un même point, construisez un segment de polygone dont les côtés soient respectivement proportionnels et parallèles aux forces, mais de manière à ce que ces côtés se succèdent sans interruption : la ligne qui achevera de fermer le polygone représentera la grandeur et la direction de la résultante cherchée.

14. A l'aide de ce que nous venons de dire, il nous sera bien facile maintenant de parvenir aux conditions d'équilibre des forces qui sollicitent un point sur un plan.

Observez d'abord, que si l'on réduisait toutes les forces à une seule et qu'on opposât à celle-ci une autre force agissant en sens contraire, mais suivant la même ligne et avec la même énergie, cette dernière détruirait l'effet de la résultante; mais celle-ci peut, comme nous l'avons dit, être considérée comme remplaçant absolument les autres, donc, si elle est neutralisée par une force quelconque, ses composantes seront neutralisées par la même force, et ainsi toute force, appliquée dans le sens contraire à l'action d'une résultante quelconque et avec la même énergie qu'elle, fait équilibre aux composantes de cette résultante.

D'après cela, comme nous avons vu que tout système de forces appliquées sur un même point a nécessairement une résultante, nous pouvons conclure que, quelque soit le système donné, il y aura toujours une force qui lui fera équilibre.

Ainsi de quelque manière, dans quelque sens et par quel nombre de forces arbitraires que soit sollicité un point sur un plan, il pourra toujours être mis en équilibre par une force égale et directement opposée à la résultante du système.

Cherchons maintenant quelle condition il faut remplir pour que plusieurs forces appliquées à un même point soient en équilibre, en vertu de leur action réciproque.

Supposons que ces forces soient P, Q, R, S et T. Composons d'abord les forces P, Q, R et S; elles

nous donneront pour résultante une certaine force P′, laquelle doit faire équilibre à la force T, puisque sans cela la force T ne détruirait pas l'effet des forces P, Q, R et S; donc, la force P′ doit être exactement égale et directement opposée à la force T, ce qui veut dire que : ***pour qu'un système de forces soit en équilibre autour d'un point, il faut que l'une quelconque de ces forces soit égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.***

D'un autre côté, puisque les forces P et T se détruisent réciproquement, leur résultante est nulle. Or, cette résultante est visiblement celle de toutes les forces du système : donc, pour qu'un système de forces quelconque soit en équilibre autour d'un point, il faut que la résultante de ces forces soit nulle.

15. Delà résulte une conséquence trop élégante et trop curieuse pour que je la passe sous silence. Nous avons vu que la résultante d'un système de forces quelconque, s'obtenait en construisant un segment de polygone dont les côtés étaient parallèles et proportionnels aux forces, et que le côté qui achevait le polygone représentait en grandeur et en direction la résultante cherchée : dans le cas de l'équilibre, cette résultante est nulle, donc, ce dernier côté doit être nul, ce qui veut dire que les deux bouts du segment de polygone doivent coincider, ou en d'autres termes :

Pour que tant de forces que l'on voudra soient

en équilibre autour d'un point, il faut qu'en construisant un polygone continu dont les côtés soient parallèles et proportionnels respectivement aux diverses forces du système, le polygone ainsi construit soit formé.

Je ne puis m'empêcher ici de vous faire observer combien un tel résultat est piquant et combien de rapports inattendus surgissent ainsi de l'adoption d'une idée aussi simple que celle de représenter les forces par des lignes, et cependant c'est, jusqu'à présent, tout ce que nous avons fait.

16. Si vous avez bien conçu tout ce que je viens de vous dire, vous êtes maintenant en état de vous rendre compte de bien des phénomènes qui autrement paraissent difficiles à concevoir, et dont le théorême de la composition des forces peut de suite vous donner l'explication.

Tel est, par exemple, le cas où placé dans une voiture qui marche avec rapidité, on cherche à jetter une pierre sur un corps immobile; il est rare que l'on atteigne le but, et encore n'est-ce qu'après beaucoup d'exercice. Voici pourquoi : la main, conduite par l'œil donne à la pierre une direction telle qu'elle passerait par le but si le corps restait immobile ; mais, au lieu de cela, la pierre reçoit encore au moment de son départ une vitesse égale à celle de la voiture, et qui se combine avec celle donnée par la main, de manière à produire une résultante d'autant plus écartée du but, que la course du char

sera plus rapide relativement à la force de celui qui lance la pierre.

La même cause d'erreur se rencontre dans le tir du canon sur les vaisseaux de guerre : il arrive souvent qu'un bâtiment envoie sa bordée, tandis qu'il est lui-même en mouvement sur une ligne perpendiculaire à celle du tir ; dans ce cas, la direction du boulet se complique de celle due à la vitesse du vaisseau, et plus celle-ci est grande et plus aussi l'erreur du pointage doit être considérable : mais ici la vitesse propre du boulet est tellement grande, que l'autre influe peu sur la direction, et il suffit de l'œil exercé par l'habitude et dirigé par le sang-froid du canonnier pour en corriger le résultat.

On observe encore dans le choc des corps élastiques un effet qui s'explique très-bien par la composition des forces : vous savez qu'un corps élastique est celui qui, ayant été comprimé par une force quelconque, revient à sa première forme avec une force égale ou à peu près égale à celle qui l'avait comprimé; en sorte qu'un tel corps, quand il choque un corps solide immobile avec une force F, est d'abord comprimé en raison de la force F, puis bientôt reprend sa forme en exerçant sur le corps immobile une pression égale à F, laquelle ne pouvant déranger le corps solide, produit un effet équivalent en renvoyant le corps choquant dans le sens opposé.

Parmi les corps élastiques, il en est un dont les usages sont nombreux dans les arts : c'est l'ivoire. On en forme, comme vous le savez, ces boules ou sphères, dont on se sert dans le seul de nos jeux de société où l'on pense encore à exercer l'œil et la main. Ces boules roulent sur une table garnie d'un tapis et fermée par quatre bandes composées de corps également élastiques. Supposez maintenant (fig. 6) qu'une de ces boules vienne choquer la bande en A suivant une direction PA et avec une force P représentée par la ligne PA ; au point A vous pourrez décomposer la force P en deux autres, l'une dirigée suivant la bande AR, l'autre suivant la ligne AQ perpendiculaire à cette bande. Cette dernière produira l'effet dont nous avons parlé, c'est-à-dire, qu'après le choc elle changera de direction, et au lieu de pousser la bille contre la bande, elle la poussera en sens contraire avec une énergie égale, en sorte qu'après le choc la bille sera sollicitée par deux forces, l'une R, qui n'a pas changé, l'autre Q' directement opposée et égale à Q. Ces deux forces se composeront comme on le voit dans la figure et produiront une vitesse qui fera avec la ligne AQ un angle égal à l'angle PAQ, en sorte que la bille reviendra en faisant ce qu'on appelle un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence, qui est celui sous lequel elle a touché la bande.

Le parallélogramme des forces rend encore

raison de ces inégalités qui ont forcé à adapter un volant aux machines où l'on change un mouvement de va et vient en un mouvement circulaire continu au moyen d'une bièle, comme dans les machines à vapeur ; mais comme nous devons revenir plus tard sur ce sujet, je me contenterai de vous engager pour le moment à examiner ce qui se passe dans cet appareil où une force à peu près constante, tend à communiquer des vitesses si variables à l'axe du volant.

Mais une application que je ne dois pas passer sous silence, c'est celle du théorème de la composition des forces à l'équilibre de certains systèmes, dans lequels on se sert de cordes ou de fils flexibles, soit composés de débris d'animaux comme les cordes d'instrumens de musique, ou de corps ligneux comme les cordages des vaisseaux, ou de métal, comme les fils de fer et de laiton.

Un premier axiome à l'égard de ces cordons, c'est que deux forces qui tirent les extrémités d'un cordon doivent être égales pour se faire équilibre : mais comme chacune d'elles ne transmet son action à l'autre qu'au moyen de la tension du cordon, il s'ensuit qu'on peut considérer la tension d'un cordon comme équivalente partout à la puissance tendante.

C'est d'ailleurs ce qui se vérifie par l'expérience, et vous n'êtes pas sans avoir vu des cordes, après avoir résisté à l'action de certaines tractions, céder enfin à une plus puissante et se rompre sous

son influence, ce qui prouve que l'effort supporté par les parties de la corde étoit plus grand dans ce dernier cas.

Supposons donc une corde tirée des deux bouts par les puissances Q et R (fig. 7), et sollicitée à un de ses points A par une force P au moyen d'un anneau mobile, puis cherchons les conditions d'équilibre entre ces trois forces.

D'abord il est visible que la corde n'étant point interrompue par l'anneau, sa tension devra être la même partout, et, comme cette tension est égale aux deux bouts à chacune des forces tendantes, il en résulte que celles-ci sont égales entr'elles.

Ensuite P doit être égale et dirigée en sens contraire de la résultante de Q et de R, en sorte que si on prolonge sa direction en AP′, dans l'angle PAR, cette ligne AP′ représentera la direction de la résultante.

Supposons maintenant que AP′ représente aussi la grandeur de la force P′ et par suite celle de P, et menons les lignes P′Q et P′R, l'une parallèle à AR, l'autre à AQ. Les côtés AQ et AR du parallélogramme ainsi construit, représenteront l'un la force Q, l'autre la force R; mais, comme nous l'avons vu tout à l'heure, les deux forces sont égales, nous aurons donc

$$AR = AQ$$

Et comme AQ est égal à P′R, il faudra que l'on aie aussi

$$AR = P'R$$

C'est-à-dire, que le triangle ARP′ doit être isoscèle.

D'après cela, il faut que l'angle AP′R soit égal à l'angle RAP′; mais comme l'angle AP′R est égal aussi à l'angle QAP′, il est visible encore que l'angle P′AR sera égal à l'angle P′AQ.

Vous voyez donc, que, quand une force tend une corde au moyen d'un anneau passé dans cette corde et d'un cordon attaché à l'anneau, la direction de ce cordon doit couper en deux l'angle formé par les deux segmens de la corde.

Vous observerez maintenant que plus l'angle QAB sera grand et plus les côtés AR et AQ s'allongeront; d'où il suit, que les forces Q et R pour faire équilibre à la force P, devront être d'autant plus grandes que l'angle des deux segmens de la corde sera plus grand, et qu'il faudra qu'elles soient infinies pour le cas où la corde serait absolument droite; en d'autres termes:

La tension d'une corde qu'une force tire par son milieu, sera d'autant plus grande que l'angle formé par les deux segmens sera plus considérable, et elle devient infinie quand la corde est absolument droite.

Il résulte delà, qu'une corde tout-à-fait tendue se briserait à l'instant sous l'action de la plus petite force qui la tirerait perpendiculairement à sa direction longitudinale, si elle ne pouvait prendre à l'instant la forme d'une ligne brisée.

Or, quelque soit la matière dont la corde est

faite, elle jouit toujours et jusqu'à un certain point de la faculté de s'allonger encore malgré la tension longitudinale qu'elle peut avoir subi : aussi les forces qui la tirent dans un sens perpendiculaire à sa direction, n'exercent pas de suite leur influence pour la rompre ; elles commencent par l'infléchir, et cela a lieu d'autant plus facilement que la corde est plus longue et plus élastique, deux circonstances faciles à expliquer ; car quand la corde est longue, elle peut faire (fig. 7) un trajet BA assez considérable, sans que l'angle QAR diminue beaucoup, et, par conséquent, sans que la force P cesse d'exercer une grande influence sur la résistance longitudinale de la corde et, quand l'élasticité est considérable, l'allongement produit par cette influence est, toutes choses égales, plus facile à obtenir.

C'est à cette cause que se doit la facilité avec laquelle une main faible et délicate infléchit les cordes d'une harpe pour les faire vibrer. Ces cordes à mesure qu'elles augmentent de diamètre et, par conséquent, de résistance longitudinale, augmentent aussi de longueur, ce qui ramène la résistance à la flexion à peu près à la même valeur.

On voit encore dans l'instrument que vous connaissez le plus, le violon, un exemple de ce que peut une très-petite force pour infléchir une corde très-tendue ; les trois premières cordes du violon sont dans ce cas et il est probable, à en

juger d'après la résistance qu'on éprouve à soulever le chevalet, qu'elle équivaut à la force de plus d'un homme : cependant vous savez comment on les met en mouvement ; quelques crins attachés à une baguette curviligne, et enduits d'un peu de colophane, sont promenés par le joueur sur la corde qu'il veut faire vibrer, dans une direction à peu près perpendiculaire à sa longueur : la légère adhérence de la colophane pour la corde, suffit seule alors pour attirer la corde dans le sens du mouvement de l'archet et pour la mettre en vibration.

On fait d'ailleurs plus d'une application utile de ce que nous venons de dire pour roidir fortement des cordages qu'une action longitudinale ne pourrait tendre qu'imparfaitement : ainsi, par exemple, si l'on veut assujétir solidement deux pieux A, B, (fig. 8) de manière à empêcher leur écartement, on fait circuler un cable autour de ces deux pieux, en le tendant aussi fortement que possible; puis ensuite, au moyen d'un cordage de moindre dimension, on rapproche autant que possible les points C et D; il doit maintenant vous être facile de vous expliquer comment de cette manière on donne au cordage une tension capable de résister aux efforts considérables qui pourraient tendre à écarter les pieux A et B, puisqu'au moyen de cet appareil on a d'abord allongé et en outre très-fortement tendu les deux cables, et, par consé-

quent, détruit une grande partie de leur élasticité, ce qui rend la tension et, par conséquent, la résistance de ces cables à peu-près insurmontable pour des forces qui, auparavant, auraient pu facilement les vaincre.

C'est sur une considération analogue que se fonde l'habitude de mettre en *porte à faux* les barres de métal que l'on veut briser : ici la barre ne pouvant fléchir que peu, se trouve dans le même cas que le fil inflexible dont nous avons parlé et se rompra plus facilement sous l'influence d'une pression donnée.

Il est visible que si la corde AP (fig. 7) au lieu de tenir à la corde RAQ par un anneau ou un nœud coulant y était fixée par un nœud, le principe de la composition des forces s'y appliquerait encore et que les conséquences en seraient les mêmes; seulement, les tensions des cordons AQ et AR pourraient être différentes, et il est facile de voir (fig. 9) que dans ce cas, celle qui s'approchera la plus de la corde tendue par la force P, sera celle qui supportera la tension la plus considérable.

On sert de ce moyen comme de l'autre pour tendre et solidifier des systèmes funiculaires, et il vous sera maintenant facile de vous rendre raison des cas dans lesquels vous les trouverez employés; mais une chose digne de remarque c'est l'emploi fait des principes dont je viens de vous entretenir,

par un insecte auquel on fait rarement attention autrement que pour le détruire ; si vous avez observé une araignée quand elle prépare la toile qui doit lui servir à prendre les animaux dont elle se nourrit, vous l'aurez vu, sans y faire peut-être réflexion, employer par instinct tous les procédés qui viennent d'être exposés.

D'abord elle s'assure ordinairement trois fils principaux ; après les avoir redoublé dans leur longueur et les avoir tendu autant que possible, elle augmente encore cette tension par trois autres fils au moyen desquels elle infléchit les premiers; puis, par trois nouveaux fils elle augmente encore la tension de ces derniers, et par suite celle des trois autres ; enfin, dans l'hexagone ainsi formé, elle établit une série de rayons convergens, qui, en rendant un peu infléchis les côtés de l'hexagone, augmentent encore leur tension, et par suite celle de tout le système, et c'est sur ce réticule ainsi bâti, qu'elle traîne de fil en fil la spirale qui achève la contexture d'un ouvrage dont l'extrême ténuité résiste à l'action des vents et de la pluie et aux chocs produits par les animaux qui viennent s'y engager.

Au reste, nous reviendrons plus tard sur les combinaisons, plus ou moins variées des systèmes, où des forces sont mises en équilibre par des assemblages de cordons. Nous allons passer maintenant à la composition des forces dans l'espace,

lorsqu'elles agissent autour d'un même point matériel, et nous retrouverons un théorème analogue à celui du parallélogramme des forces et aussi important par ses nombreuses applications.

17. Soient (fig. 11) trois forces O, P, Q, appliquées au point matériel M et représentées en grandeur et en direction par les droites MO, MP et MQ.

Composons d'abord les deux forces O et P en une seule. Pour cela, dans le plan de ces forces formons le parallélogramme MOR'P : la diagonale MR' de ce parallélogramme représentera en grandeur et en direction une force R' qui peut être substituée à l'assemblage des forces P et O ; en sorte que nous n'aurons plus qu'à considérer les deux forces R' et Q.

Or, la résultante de ces deux forces peut s'obtenir facilement ; pour cela, formons encore le parallélogramme MR'RQ, sa diagonale MR représentera en grandeur et en direction la résultante R des trois forces O, P, Q.

Or, vous voyez facilement que cette diagonale, est précisément celle du parallélipipède construit sur les trois lignes AO, AP et AQ, car RR' menée parallèlement à MQ par le bout R' de la base du parallélipipède est visiblement une arête de ce parellélipipède, et de plus il a été pris égal à AQ, à cause du parallélogramme MRR'Q, en sorte que le point R est sûrement le sommet de l'angle du parallélipipède opposé à l'angle A,

et que, par suite, la ligne AR est la diagonale de ce parallélipipède. Delà résulte le théorème suivant :

Si trois forces quelconques sont représentées en grandeur et en direction par trois droites passant par le point d'application :

1°. *Ces trois forces auront une résultante unique ;*

2°. *Cette résultante sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallélipipède construit sur les trois longueurs données, prises pour arêtes ;*

3°. *Cette résultante ne sera jamais nulle tant que les trois composantes seront dans des plans différens ;* d'où il suit, que trois forces ne peuvent jamais se faire équilibre que lorsqu'elles sont dans un même plan ;

4°. *Enfin*, puisqu'on peut toujours opposer à cette résultante une force égale et directement opposée qui la détruise, *trois forces quelconques, appliquées au même point dans l'espace, peuvent toujours être mises en équilibre par une quatrième force, que vous savez maintenant déterminer.*

Si l'on supposait au lieu de trois forces, quatre ou plus de forces appliquées au même point, on voit, en supposant que ce soient, par exemple, les force P, Q, R, S, T, U, qu'on pourra d'abord réduire ces trois forces P, Q et R en une seule P', puis les trois forces P', S et T aussi en une seule Q', puis enfin les deux forces Q' et U' encore en une seule, R', qui sera la résultante totale du système. Ainsi :

1°. *Tant de forces qu'on voudra appliquées en un même point peuvent toujours se réduire à une seule qui sera la résultante totale du système.*

2°. *Il est toujours possible de trouver une force qui fasse équilibre à toutes ces forces et on la détermine en construisant la résultante, dont la force cherchée devra avoir la direction et la grandeur.*

3°. *Pour que des forces en nombre quelconque se fassent équilibre autour d'un point en vertu de leurs actions réciproques, il faudra que leur résultante soit nulle, ce qu'il est facile de vérifier.*

4°. Enfin, le théorême du parallélipipède des forces peut servir à décomposer une force donnée en trois autres quand les directions de celles-ci sont données ; il ne faut pour cela que mener par l'extrêmité de la droite qui représente la force donnée en grandeur et en direction trois plans parallèles, l'un aux forces O et P, l'autre aux forces P et Q, le troisième aux forces O et Q. Le premier coupera la direction de la force Q en un point dont la distance au point M représentera la valeur de cette force, les deux autres détermineront de la même manière les grandeurs respectives des forces O et P : tout cela peut, pour le moment, vous paraître un peu difficile, mais avec un peu de réflexion, il vous sera aisé d'en concevoir clairement la raison, et une foule de circonstances vous en feront connaître l'importance plus tard.

Comme je l'ai promis, je joins ici quelques remarques destinées à ceux qui veulent voir dans la science que nous traitons, quelque chose de plus rigoureux et de plus complet qu'un aperçu imparfait et sommaire. Nous reprendrons donc le parallélogramme et le parallélipipède des forces en employant une marche différente.

Supposons un point matériel M fixé à demeure sur un plan p; admettons que ce plan soit assujetti à glisser sur un autre plan p', celui-ci sur un troisième p'', ce dernier sur un quatrième p''', et ainsi de suite.

Concevons un axe fixe sur un plan immobile qui coinciderait avec toutes les positions des plans variables p, p', p'', ... imaginons un second axe perpendiculaire au premier, désignons par AX le premier, par AY le second, A étant leur point d'intersection, et, par conséquent, l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires.

Supposons maintenant que la vitesse v du plan p par rapport au plan commun, soit dirigée suivant une ligne droite faisant avec le premier de ces axes un angle vX, et avec le second un angle vY : que le second plan p' soit animé par rapport au plan p d'une vitesse v', faisant avec l'axe AX un angle v'X, et avec l'axe AY un angle v'Y; supposons enfin et en général que le plan p_n ait par rapport au plan p_n' une vitesse v_n faisant l'angle

v_nX avec l'axe AX et l'angle v_nY avec l'axe AY, et tout cela posé, voyons quel sera au bout d'un tems X le trajet parcouru par le point matériel M.

Cherchons d'abord quelle sera la quantité dont il aura marché dans le sens de l'axe AX.

Pour cela, observons que le chemin qu'il aura fait au bout de ce tems en vertu du mouvement du plan *p* sera *v. t.* Cos *v*X, puisque l'espace qu'il aura parcouru dans le sens du mouvement du plan sera représenté par *v. t*, et que cet espace faisant avec l'axe AX l'angle *v*X, se projetera sur cet axe, suivant une ligne égale à l'espace parcouru lui-même multiplié par le Cosinus de l'angle qu'il fait avec la droite AX sur laquelle on le projette.

Le chemin parcouru par le point M en vertu du mouvement du second plan dans le sens de l'axe AX sera également *v'. t.* Cos *v'*X.

Le chemin parcouru dans le même sens par le point M en vertu du troisième plan sera *v''. t.* Cos *v'*X.

En sorte que le trajet total dans le sens de l'axe AX sera exprimé par

$v.t.$ Cos vX $+$ $v't.$ Cos v'X $+$ .... v_n $t.$ Cos v_nX $+$

laquelle quantité devient

t. { $v.$ Cos vX $+$ $v.$ Cos v'X $+ v''.$ Cos v''X.... $+$ v_n Cos v_nX }

ce qui est l'expression de l'espace parcouru par le point M suivant l'axe AX en vertu des divers mouvemens que nous lui avons supposés.

Il est évident que le même point aura parcouru dans le même tems dans ce sens de l'axe AY l'espace

$t \{ v . \text{Cos}\, v\text{Y} + v' . \text{Cos}\, v'\text{Y} + v'' \text{Cos}\, v''\text{Y} \ldots + v_n . \text{Cos}\, v_n \text{Y} \}$.

Si l'on veut que le mouvement résultant soit nul, il faudra écrire que le point M n'avance ni dans le sens de AX ni dans celui de AY, d'où il suit que l'on doit avoir

$$v . \text{Cos}\, v\text{X} + v' . \text{Cos}\, v'\text{X} + v'' . \text{Cos}\, v''\text{X} \ldots = 0,$$

et $v . \text{Cos}\, v\text{Y} + v' . \text{Cos}\, v'\text{Y} + v'' . \text{Cos}\, v''\text{Y} \ldots = 0.$

Cette double équation indique l'état d'équilibre, et, comme nous l'avons vu, on peut dans cet état considérer les vitesses comme proportionnelles aux forces qui tendent à les produire; en sorte qu'en désignant ces dernières par P, P′, P″, ... et les angles qu'elles font avec les axes AX, AY, par PX, P′X, P″X, ... PY, P′Y, P″Y, .. lesquels sont égaux à vX, v'X, v''X, ... vY, v'X, v''Y, ... ces équations deviennent :

$$\text{P} . \text{Cos}\, \text{PX} + \text{P}' . \text{Cos}\, \text{P}'\text{X} + \text{P}'' . \text{Cos}\, \text{P}''\text{X} \ldots = 0,$$

et $\text{P} . \text{Cos}\, \text{PY} + \text{P}'\ \text{Cos}\, \text{P}'\text{Y} + \text{P}''\ \text{Cos}\, \text{P}''\text{Y} \ldots = 0.$

ou en désignant par Σ, l'aggrégation de plusieurs termes de même espèce qui ne diffèrent que par l'indice,

$$\Sigma\ (\text{P. Cos PX}) = 0.$$

$$\Sigma\ (\text{P. Cos PY}) = 0.$$

Equations que l'on trouve dans tous les traités de mécanique pour les conditions de l'équilibre d'un système de forces autour d'un point, mais que nous avons obtenues ici à priori et sans employer de recherches subsidiaires.

Si l'on voulait de même chercher les conditions d'équilibre entre plusieurs forces P, P′, P″,.....

agissant dans l'espace sur un même point M, il faudrait prendre trois axes perpendiculaires chacun au plan des deux autres, AX, AY et AZ, et désignant par PX, PY, PZ, P'X, P'Y, P'Z, P''X, P''Y, P''Z,... les angles formés respectivement par les directions de ces forces avec les trois axes, on trouverait par une marche semblable à la précédente les trois équations,

$$\Sigma \text{ (P. Cos PX)} = 0,$$
$$\Sigma \text{ (P. Cos PY)} = 0,$$
$$\Sigma \text{ (P. Cos PZ)} = 0.$$

qui expriment les conditions d'équilibre d'un point libre dans l'espace, mais soumis à l'action simultanée de plusieurs forces qui ne peuvent produire du mouvement.

En considérant chaque force dans le cas d'équilibre comme égale et opposée à la résultante de toutes les autres, on pourrait facilement conclure de tout ceci plusieurs théorêmes intéressans sur la composition des forces et leurs résultantes et qui comprendraient tout ce que nous avons dit dans la leçon comme cas particulier ; mais nous reviendrons ailleurs sur ces conséquences, en présentant les équations précédentes d'équilibre comme dérivant d'un principe plus général, dont nous ferons ensuite un fréquent usage. Il nous suffit, pour le moment, d'avoir montré qu'on peut se dispenser des prolégomènes ordinaires pour arriver à déterminer les conditions d'équilibre entre plusieurs forces concourantes.

STATIQUE.

DEUXIÈME LEÇON.

Conséquences remarquables de la leçon précédente : des forces parallèles, et de leur composition, quand elles tirent dans un même sens.

1. Dans la leçon précédente nous ne nous sommes occupés que des forces qui, quoique arbitrairement choisies par rapport à leur intensité et à leur direction, étaient pourtant assujetties à passer par un même point commun à toutes; nous en avons déduit ce beau principe que, soit sur un plan, soit dans l'espace, un tel ensemble de forces avait nécessairement une résultante unique, ou bien se faisait équilibre: dans le premier cas, nous avons trouvé le moyen de déterminer la grandeur et la direction de la résultante, et nous avons donné un moyen de reconnaître l'existence du second.

Nous avons en outre donné le moyen de décomposer une force en deux ou en trois autres, dont les directions seraient données, et, quoique je ne vous aie pas fait voir alors toute l'étendue des

conséquences de cette décomposition, vous avez pu pressentir quel serait l'usage d'une méthode au moyen de laquelle, il nous sera désormais possible dans beaucoup de cas, de choisir la direction des forces qui agissent sur un système quelconque. Toute la leçon d'aujourd'hui ne sera qu'une application continuelle de ce théorème.

2. Mais auparavant, je dois vous faire quelques observations générales sur la manière dont se comportent les forces dans un système quelconque.

Nous pouvons supposer qu'une force P agit sur le point A d'un corps au moyen d'un cordon. Or, comme nous l'avons déjà observé, il est indifférent alors de choisir pour le point d'application de la force tel ou tel point du cordon; mais ce dernier est dans la direction de la force; donc, il est indifférent de prendre tel ou tel autre point sur cette direction pour le point d'application de la force et l'action de cette dernière sur le point A et, par conséquent, sur le corps, ne sera pas changée. Il est de même indifférent de prendre pour point d'application un autre point, soit dans l'intérieur du corps, soit partout ailleurs sur la direction de la force, pourvu qu'on suppose ce point invariablement lié au corps, car dans ce cas, en supposant qu'on y fasse agir la force par un cordon ou par une barre inflexible, ce cordon passera par le point A, et celui-ci s'y trouvera soumis à l'action de la force P comme s'il en faisait

partie, ce qui ramène les choses au même état que dans le cas de l'application directe de la force au point A.

Ainsi donc quelque soit la nature des forces appliquées sur un même corps, au lieu de prendre pour point d'application de ces forces ceux qui vous sont données, vous pourrez en choisir de tels autres que vous voudrez sur la direction de ces forces, pourvu toutefois que vous les supposiez liés d'une manière invariable avec le corps.

Ce théorème, dont les conséquences ne vous paraissent peut-être pas maintenant très-prochaines, va pourtant nous fournir de suite deux corollaires très-importans.

Supposons d'abord le cas où toutes les forces qui agissent sur le corps, sont comprises dans un même plan.

Soient R, R′, R″...... ces forces, et A, A′, A″..... leurs points d'application (fig. 1), et admettons que les lignes AR, A′R′, A″R″, représentent la grandeur de ces forces.

Prenons deux points arbitraires C et D, mais invariablement fixés aux corps, puis menons par chacun de ces deux points et par les points A, A′, A″, ... les droites CA, CA′, CA″, ... DA, DA′, DA″..... que nous prolongerons au delà des points d'application; enfin, formons les parallélogrammes APQR, A′P′Q′R′, A″P″Q″R″......

D'après ce que nous avons vu dans la première

leçon, au lieu des forces R, R′, R″..... représentées en grandeur et en direction par les diagonales AR, A′R′, A″R″, on pourra ne considérer que les forces P et Q, P′ et Q′, P″ et Q″, représentées par les droites AP et AQ, A′P′ et A′Q′, A″P″ et A″Q″ formant les côtés des parallélogrammes correspondans à ces diagonales.

Mais les forces P, P′, P″, ... se dirigeant vers le point D, nous sommes libres, d'après ce que nous venons de dire, de les supposer appliquées à ce point puisqu'il se trouve sur la direction de chacune d'elles, et d'ailleurs qu'il est invariablement lié au corps.

Il en est de même des forces Q, Q′, Q″..... qu'il nous est permis de supposer appliquées au point C qui se trouve sur leur direction commune.

Ainsi, quelque soit le nombre et la direction des forces appliquées à un corps solide, il est toujours possible, lorsqu'elles sont comprises dans un même plan, de les remplacer par deux groupes de forces concourantes vers deux points arbitraires situés dans ce plan.

Or, nous savons que tout groupe de forces concourantes (1re. leçon, page 36) peut se réduire à une seule force que nous avons le moyen de déterminer : il en sera de même pour les deux groupes de forces P, P′, P″.... et Q, Q′, Q″.... et par conséquent :

3. *Si tant de forces qu'on voudra, situées dans*

un plan, sont appliquées à un même corps solide, elles pourront toujours se réduire à deux forces seulement, situées dans le même plan et passant par deux points arbitrairement choisis sur ce plan.

C'est là le premier corollaire que je vous ai annoncé, et vous pouvez voir déjà quelle immense simplification il introduit dans l'examen des conditions d'équilibre d'un ensemble donné de forces.

Avant de passer au second, voyons ce que celui-ci peut nous indiquer encore.

D'abord il est visible que les directions des deux forces résultantes ne pourront que se confondre, se couper ou être parallèles.

Dans le premier cas, il est visible que les deux forces se réduiront à une seule qui sera la somme ou la différence des deux premières, selon que celles-ci tireront dans le même sens ou dans le sens opposé. Dans cette dernière hypothèse, si les forces sont égales, elles se détruiront, et il y aura équilibre entr'elles et par suite entre toutes les forces qu'elles représentent. Nous verrons plus tard que c'est une condition indispensable pour l'équilibre.

Dans le second cas, les deux forces résultantes se coupant sous un angle quelconque, pourront être composées en une seule, d'après le théorême du parallélogramme des forces, et cette dernière sera la résultante générale du système. Ainsi dans

ce cas, il ne pourra y avoir équilibre qu'autant que les deux résultantes partielles seront nulles séparément.

Dans le troisième cas enfin, les deux forces étant parallèles, nous n'avons rien dit dans la première leçon qui puisse leur être applicable, en sorte que nous ne pouvons rien conclure de l'existence de ces deux forces.

Vous voyez donc que dans l'hypothèse d'un groupe de forces situées dans un même plan et agissant sur un corps solide, nous pourrons reconnaître, au moyen de ce que nous savons déjà, dans deux circonstances principales, si l'équilibre a lieu ou si les forces peuvent être remplacées par une force unique ; mais qu'il peut y avoir aussi un état de choses dans lequel nous ne pourrons rien conclure ; c'est celui où l'ensemble des forces agissantes serait remplacé par deux forces parrallèles : cette même difficulté se rencontre, comme nous l'allons voir, dans le second corollaire que nous avons annoncé et qui est relatif à l'hypothèse la plus générale qu'on puisse faire sur des forces qui agissent sur un corps solide.

5. Supposons maintenant un corps solide quelconque, assujetti à l'action de tant de forces qu'on voudra R, R′, R″..... appliquées en des points A, A′, A″ .... de ce corps : prenons comme tout à l'heure trois autres points B, C, D, invariablement fixés à ce corps, et menons par chacun de

ces points et par les points d'application des forces, les trois systèmes de lignes BA, BA', BA''....., CA, CA', CA''......, DA, DA', DA'', ...; nous pourrons décomposer d'après le théorème du parallélipipède des forces la force R en trois autres O, P, Q dirigées l'une suivant la droite BA, l'autre suivant CA, la troisième suivant DA ; il en sera de même de la force R' que nous pourrons décomposer aussi en trois autres O', P', Q', dirigées suivant BA', CA', DA', et ainsi de suite; en sorte que les forces R, R', R''..... pourront être représentées par trois groupes de forces, dont les uns O, O', O''.... se dirigeront vers le point B, les autres P, P', P''... sur le point C, et le troisième groupe se composera des forces Q, Q', Q'', ... dirigées vers le point D.

Or, chacun de ces groupes se composera en une seule force, laquelle pourra être nulle pour le cas particulier où le groupe serait en équilibre de lui-même, (voyez la 1re. leçon page 36.... 4°.); de telle façon que l'ensemble des forces R, R', R'', ... sera toujours remplacé par trois forces au plus, passant par trois points arbitraires.

Nous pourrons donc établir, pour l'expression du second corollaire, dont je vous ai déjà parlé, le théorème suivant :

Tant de forces qu'on voudra appliquées de quelque façon que ce soit à divers points d'un corps solide, peuvent toujours se réduire à trois forces

au plus, passant par trois points choisis arbitrairement, mais liés au corps solide d'une manière invariable.

Si ces trois lignes se rencontrent dans un point, alors il vous sera facile d'en trouver la résultante, ou de trouver les conditions de leur équilibre (1re. leçon page 36); mais si elles ne se rencontrent point, il faudra avoir recours à quelqu'autre moyen que celui que nous connaissons, car il devient insuffisant, et ne fournit même aucune espèce de lumière.

Mais vous observerez que, si par chacun des trois points B, C, D,... on mène trois droites parallèles à trois autres données dans l'espace, on pourra décomposer chacune des trois résultantes partielles dont nous avons parlé, en trois autres forces dirigées chacune suivant une de ces droites, ce qui nous donnera trois groupes composés chaque de trois forces parallèles entr'elles, et que l'on pourra substituer aux forces R, R', R''......, qui composaient le système dont avons parlé.

Nous voici donc ramenés de nouveau à considérer des forces agissantes en même tems suivant des lignes parallèles, comme cela nous est arrivé dans le cas des forces agissantes dans un même plan, et ici encore nous sommes arrêtés par l'insuffisance des notions que nous avons acquises.

Vous voyez donc combien il nous importe

d'examiner ce qui se passe dans un système soumis à de pareilles forces; d'ailleurs, comme nous le verrons plus tard, nous aurons à considérer leur action dans une question bien importante, celle de l'équilibre des corps soumis à l'action de la pesanteur terrestre. Nous allons donc nous en occuper. (*)

Il me serait aisé de vous faire observer que des forces parallèles pouvant être considérées comme si leur point de concours était placé à l'infini, ce cas rentre, comme particularité, dans celui que nous avons examiné dans la première leçon, et que, par conséquent, en faisant entrer cette remarque et ses conséquences dans le raisonnement, nous devrions arriver à la loi de composition ou d'équilibre des forces parallèles; et en effet nous pourrions arriver ainsi et même avec assez d'élégance au but que nous nous proposons; mais cette marche aurait l'inconvénient de laisser dans votre esprit du vague et de l'incertitude, et, quoique rigoureuse, le fil qui nous dirigerait pourrait facilement vous échapper : au lieu de cela je vous présenterai une méthode plus directe, en la modifiant succes-

(*) Il est important d'observer que dans toute cette leçon et la suivante, nous entendons par le mot corps un assemblage invariable de points matériels non pesans. Nous verrons dans la leçon suivante, comment ensuite on trouve le moyen d'accorder cette supposition avec l'introduction des forces dues à la pesanteur.

sivement, de manière à vous faire voir la chose sous plusieurs aspects différens, afin que chacun de vous puisse s'arrêter à celui qui lui paraîtra le plus propre à le convaincre.

Occupons-nous d'abord du cas où il ne se trouverait que deux forces ; elles peuvent être égales ou inégales : supposons les d'abord égales et tirant dans le même sens.

6. Soient donc (fig. 2) deux forces P et Q égales et tirant dans le sens de A vers P, les deux points A et B appartenant à un corps solide qui les assujettit dans des rapports invariables de position. Je dis : 1°. *que ces deux forces pourront être représentées par une seule force* R *qui leur sera parallèle, et* 2°. *que cette résultante passera au milieu de la droite* AB *et sera égale à la somme des deux forces* P *et* Q.

La démonstration de ce théorème est bien simple : supposez que les forces P et Q soient représentées par les droites AP et BQ : il est d'abord visible que ces droites seront égales. Maintenant prenons de B en S′ et de A en S deux longueurs AS, BS′, égales chacune à la moitié de AB et supposons qu'on ait appliqué en A et en B deux forces S et S′, l'une représentée par AS, l'autre par BS′, c'est-à-dire, égales, mais tirant l'une de A vers S, l'autre de B vers S′ ; vous voyez de suite que nous n'aurons rien changé à l'état du système, car la force S détruit évidemment l'action de la

force S', puisqu'elle lui est égale et qu'elle tire en sens contraire d'elle dans la direction commune AB.

D'après cela, nous pourrons considérer la résultante des quatre forces S, S', P et Q comme la même que celle de P et Q seulement. Occupons-nous donc de chercher celle des quatre forces P, Q, S et S'.

Pour cela menons d'abord la ligne PQ qui sera évidemment parallèle à la ligne AB, puis par les points S et S' traçons les droites SP', SQ' parallèles à la direction commune des forces P et Q, et conduisons ces droites jusqu'à leur rencontre en P' et Q' avec la droite PQ; nous aurons ainsi formé trois parallélogrammes SAP'P, APQB, BQQ'S', dont les deux extrêmes seront égaux.

Maintenant menez les diagonales BQ' et AP' et prolongez les jusqu'en M où elles se rencontrent, puis par le point R, milieu de PQ, imaginez les droites BR et AR. Il vous sera aisé de voir que la première de ces droites est parallèle à AR' et par conséquent à AM, tandis que la seconde est parallèle à AR et par conséquent à BM, en sorte que la figure AMBR est un parallélogramme, et que si on mène la diagonale MR, elle coupera en deux la seconde diagonale AB du même parallélogramme et, par conséquent, passant par le milieu C de cette droite comme par le milieu R de la droite PQ, elle sera parallèle aux côtés AP

et BQ et égale en longueur au double de AP ou de BQ.

Reportons-nous maintenant à ce que représentent les différentes lignes de notre figure :

D'abord la diagonale AP′ représente évidemment la grandeur et la direction de la résultante des forces P et S, représentées l'une par AP, l'autre par AS ;

La diagonale BQ′ représente aussi la grandeur et la direction de la résultante des forces Q et S′ ;

En sorte que les droites AP′ et BQ′ ou leurs égales AM et BM représentent à elles deux les quatre forces P, Q, S et S′.

Mais maintenant les deux forces P′ et Q′ que représentent ces droites, peuvent être sensées appliquées au point M, et leur résultante aura la grandeur et la direction de la diagonale MR du parallélogramme MARB, en sorte que cette résultante qui n'est autre chose que celle des quatre forces P, Q, S et S′, ou, comme nous l'avons vu, des forces P et Q, sera parallèle à la direction des forces P et Q, et égale à deux fois l'une ou l'autre, ou à leur somme, ce que nous devions démontrer.

7. Si vous avez suivi cette démonstration avec attention, vous aurez pu y voir le germe d'une idée que nous employerons souvent plus tard ; en effet, remarquez que nous avons ici introduit deux forces étrangères au système ; savoir : les

forces S et S' ; comme nous ne sommes assujettis qu'à les prendre de manière à se faire équilibre, afin de ne pas troubler l'état réciproque des autres forces, nous avons pu choisir leur direction de manière à ce que les deux résultantes obtenues P' et Q', pussent se rencontrer, et par là nous avons éludé la difficulté que nous offrait le parallélisme des deux forces données P et Q, en sorte que nous avons fait rentrer le cas précédent dans le domaine de la théorie exposée dans la première leçon. Cet artifice nous sera souvent utile et je n'ai pas voulu laisser échapper la première occasion de vous en faire apercevoir : voilà pourquoi j'ai donné plus d'étendue à la démonstration précédente que je n'aurais en apparence dû le faire. Au reste, voici une démonstration beaucoup plus facile : elle est fondée sur l'uniformité de la tension d'un cordon flexible et inextensible dans tous les points de son étendue, quelque soient d'ailleurs les inflexions de ce cordon, et elle nous donnera l'occasion d'appliquer et de reconnaître un nouveau mode de raisonnement qui nous sera fréquemment utile par la suite.

8. Imaginons (fig. 3) dans le corps dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, une ouverture plane, très-peu large et de la même apparence, sauf cette largeur, que l'ouverture dans laquelle on loge les rouets d'une poulie. Supposez que les deux parties de ce corps soient jointes par quatre

petits cylindres d'un rayon presque nul, comme seraient de fines aiguilles à coudre; ces quatre cylindres ou chevilles seront A, B, C et C', et nous pouvons supposer que les deux chevilles C et C' soient très-proches l'une de l'autre et en en même tems très-proches du milieu M de la droite AB qui joindrait les points A et B.

Concevons maintenant un fil flexible qui passe au dessus du point d'arrêt A, puis au dessous du point C, qui alors se replie autour d'un point fixe P, revient sur lui-même, passe sous le point C' et se replie en repassant au-dessus du point B.

Supposons que ce fil soit tendu à ses deux bouts P et Q, par deux forces P et Q égales, et que les choses soient tellement disposées que les quatre fils AP, BQ, CF et C'F soient perpendiculaires à la droite AB, puis examinons l'état du corps dans cette hypothèse.

D'abord il est visible que les deux parties AC et BC' du fil, tendant à rapprocher l'une les points A et C, l'autre les points B et C', n'ont aucune influence sur le système, à cause de son invariabilité de forme; ainsi, il ne reste plus qu'à considérer les effets de la tension des cordons perpendiculaires à la direction AB.

Or, il est clair que le cordon étant également tendu dans toute sa longueur, la tension de la partie AP et celle de la partie BQ sont égales, et que chacune d'elles tire le point d'appui avec la

même force ; ainsi, on peut considérer les deux points A et B comme sollicités par deux forces égales et parallèles. D'un autre côté, les deux cordons CF et C'F, ont des tensions égales aux tensions des cordons AP et BQ, en sorte que l'effort supporté par le point F ou par le point M que nous supposerons pour un moment représenter l'ensemble des points C et C', cet effort, dis-je, est égal à deux fois la force P ou Q. Ainsi donc le système entier est sollicité par trois forces perpendiculaires à la direction AB : de ces trois forces parallèles, deux, P et Q sont égales et tirent dans le même sens ; la troisième R, tirant en sens contraire des deux autres, est égale à leur somme et passe par le milieu M de la droite qui joint les points d'application des autres ; maintenant je dis que toutes ces forces se font équilibre.

En effet, en vertu de la symétrie de toute la figure par rapport à la droite RR', on voit que la ligne AB ne peut prendre aucun mouvement ni à droite ni à gauche de cette droite, vu que tout mouvement qui se ferait dans le sens de la force Q, par exemple, devrait avec autant de raison s'effectuer dans le sens de la force P, et comme le système ne peut prendre deux mouvemens à la fois, il est clair qu'il ne prendra que celui dans lequel tout restera symétrique par rapport à la ligne RR', c'est-à-dire, un mouvement de translation parallèlement à lui-même dans le sens de la droite RR'.

Supposons donc que le corps ait fait un tel mouvement, qu'il se soit, par exemple, avancé de la quantité Aa, et voyons ce qui aura résulté de ce mouvement pour la position des points P et Q, que nous supposerons s'être placés quelque part en P' et Q' par suite de ce mouvement.

D'abord la longueur totale du cordon depuis le point P jusqu'au point Q n'aura pas changé; en outre les longueurs AC, BC' sont égales respectivement aux longueurs ac et bc', en sorte que la somme des cordons aP', et cR sera la même que celle des cordons AP et CR, ou, en d'autres termes, on aura

$$AP + CR = aP' + cR$$

$$\text{Mais } aP' = AP' + Aa.$$

$$\text{Et } cR = CR - Cc$$

et d'un autre côté il est facile de voir que $Cc = Aa$ en sorte que l'on a

$$cR = CR - Aa.$$

Ajoutant cette valeur avec celle de Pa on trouve

$$aP + cR = AP' + CR + Aa - Aa = AP' + cR,$$

mais puisqu'on a

$$AP + CR = aP + cR,$$

il faut aussi que l'on ait

$$AP + CR = AP' + CR$$

et retranchant des deux côtés CR, il reste

$$AP = AP'$$

c'est-à-dire, que le point P' coincide avec P, ou bien, en d'autres termes, que le mouvement

du corps n'a pas changé la position du bout du cordon auquel la force P était appliquée.

Il en sera de même du point Q qui n'aura pas bougé, en sorte que le mouvement du corps aura eu lieu sans que les points d'application des forces P et Q se soient mus.

Il est donc clair que ces points d'application auront été étrangers au mouvement du corps, qui se sera fait ainsi sans la participation et, pour ainsi dire, à l'insçu des forces P et Q.

Or, il n'y a dans tout le système d'autre cause de mouvement que les forces P et Q; ainsi celui dont nous venons de parler ne peut avoir lieu, puisqu'il faudrait pour cela supposer dans le corps une cause particulière de mouvement, ce qui est impossible et absurde; donc, le mouvement de translation ne peut avoir lieu dans aucun sens, et comme il est le seul que puisse prendre le corps d'après ce que nous avons vu, ce corps sera donc en équilibre. Ainsi, les trois forces P, Q et R sont en équilibre.

Mais, si l'on suppose maintenant une force R' égale à R et dirigée en sens contraire de cette dernière, tout en passant aussi par le point d'application M, il est visible qu'elle fera équilibre à R, et par conséquent, elle remplacera l'action des forces P et Q. Donc, elle sera leur résultante, donc :

Deux forces P et Q égales et parallèles et

tirant dans le même sens, ont une résultante égale à leur somme et tirant dans le même sens, laquelle leur est parallèle et passe à une égale distance de chacune d'elles. (*)

Il est bon de remarquer maintenant que nous avons, dans la démonstration précédente, fait usage d'un procédé que nous n'avions pas employé, et de bien analyser ce procédé, afin que nous puissions l'appliquer une autre fois; nous avons d'abord remplacé les forces par un cordon continu, afin de n'avoir à considérer qu'une seule

(*) Quelques lecteurs trouveront que j'ai singulièrement appuyé sur les deux démonstrations d'un principe fort simple; je les prierai d'observer que je ne fais ici qu'écrire mes leçons après avoir essayé plusieurs manières de démontrer la même chose; les deux démonstrations, surtout la dernière, sont celles qui ont le plus satisfait mes auditeurs; j'ai donc cru pouvoir ou plutôt devoir les transcrire ici telles que je les donne. Je les ai appliquées toutes les deux au cas le plus simple, celui de deux forces égales, parce que j'ai remarqué qu'alors le cas des forces inégales et parallèles, n'offrait plus d'obscurité aux élèves; il faut, au reste, que ceux qui donnent de pareilles leçons, tâchent, autant que possible, d'adoucir le saut de la théorie des forces concourantes à celle des forces parallèles. Ce dernier cas est déjà compris dans l'équilibre des corps composés de plusieurs points, et cette condition nouvelle à introduire produit toujours de l'obscurité. C'est peut-être cela qui est cause de ce que j'ai déjà observé plusieurs fois : savoir qu'il y a de l'avantage à faire précéder cette théorie par un aperçu sur l'équilibre d'un corps solide, comme je l'ai fait dans cette leçon.

action; puis nous avons supposé que le système prenait un mouvement, et nous avons vu que ce mouvement ne pouvait pas être produit par les forces; d'où nous avons conclu qu'il ne pouvait pas avoir lieu. Or, c'est ce qui sera vrai toutes les fois que nous pourrons vérifier l'existence ou non de ce résultat sur un système quelconque de forces, et vous verrez qu'il est toujours possible de le faire. Nous ferons dans la suite plusieurs applications de cette méthode.

9. Passons maintenant au cas où les forces P et Q seraient inégales et tirant dans le même sens.

Soient donc (fig. 4) deux forces P et Q appliquées à deux points quelconques d'un corps solide. Dans le plan de ces deux forces, menons une droite arbitraire AB, qui coupe en A la direction de la force P et en B celle de la force Q. Portons de A en P et de B en Q deux longueurs, l'une AP proportionnelle à la force P, l'autre AQ proportionnelle à la force Q.

Menons maintenant les droites PB, AP′ parallèle à PB et PP′ parallèle à AB : nous formerons ainsi le parallélogramme ABPP′. Or, comme nous le savons, on peut considérer le point A comme point d'application de la force P et, par conséquent, nous pouvons la décomposer à ce point en deux autres P′ et P″ dirigées, l'une suivant la droite AB, l'autre suivant la droite AP′. Mais, en vertu du parallélogramme des forces, AP repré-

sentant ici la force P, les deux autres seront évidemment représentées respectivement par les droites AP′ et AB.

Prolongeons la droite AP′ jusqu'en M à sa rencontre avec la direction de la force Q : nous pouvons prendre encore M pour le point d'application de la force Q et de la force P, et, par conséquent, remplacer les deux forces P′ et Q par une seule passant par ce point M. Pour cela, observons d'abord que la droite AP′ est égale à la droite BP comme parallèles comprises entre parallèles, ensuite que cette dernière est égale à la droite AM par une semblable raison ; en sorte que AP′ est aussi égal à AM, d'où il suit que AM représente aussi bien que AP′ la grandeur de la force P′ ; ainsi donc si vous portez de A en Q′ une longueur AQ′ égale à AQ, et si vous construisez ensuite le parallélogramme AMQ′Q″, la diagonale MQ′ de ce parallélogramme représentera la résultante des forces P′ et Q, en sorte qu'au lieu des deux forces P et Q, il ne vous reste plus à considérer que les deux forces Q′ et P″, l'une représentée en grandeur et en direction par la droite Q′M, l'autre par la droite AB.

Ces deux droites se rencontrent quelque part dans un point C placé entre les points A et B, et ce point pouvant être pris pour le point d'application des deux forces P″ et Q′ sera celui par lequel passera leur résultante qui n'est autre

chose que la résultante des deux forces P et Q. Ainsi donc les deux forces P et Q ont une résultante unique et cette résultante passe par un point placé entre les points d'application A et B. Déterminons exactement sa position.

Considérons pour cela les deux triangles MCB et ACQ'; il est évident que ces deux triangles sont semblables, puisqu'ils ont les côtés AQ' et BM parallèles et que les autres côtés leur sont communs à tous les deux : en vertu de cette similitude, on aura, comme vous le savez, la proportion

AC : BC :: AQ' : BM :: BQ : AP

puisque BQ = AQ' et BM = AP

Mais comme BQ et AP représentent, l'un la force Q, l'autre la force P, on a aussi

BQ : AP :: Q : P

ce qui donne à la place de la proportion précédente celle-ci :

AC : BC :: Q : P.

D'où il suit que le point dans lequel la résultante cherchée coupe la ligne AB, partage cette ligne en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces P et Q.

Quant à la valeur et à la direction de cette résultante, elles sont faciles à déterminer; en effet, (fig. 5) les choses étant comme nous l'avons supposé, au lieu de décomposer une des forces P et Q, comme nous l'avons fait précédemment, appliquons aux points A et B, et dans le sens de la

droite AB, deux forces P′ et Q′ égales, mais tirant en sens contraire; leur effet sera évidemment nul et au lieu des deux forces P et Q, on pourra considérer les quatre forces P, Q, P′ et Q′ et leur résultante sera la même que celle de P et de Q.

Mais d'abord, les forces P et P′ se composent en une seule p dirigée suivant Am, tandis que les forces Q et Q′ se composent aussi suivant une force q dirigée suivant Bm. Les deux résultantes se rencontrent quelque part en m, et on peut regarder ce point m comme leur point commun d'application. Mais là, il est évident qu'on peut redécomposer chacune de ces deux forces en ses deux composantes primitives. Ainsi p se décomposera en deux forces l'une P_1 et l'autre P'_1 égales et parallèles à P et à P′, et q se décomposera aussi en deux autres Q_1 et Q'_1 égales et parallèles à Q et Q′. Or, comme Q′ et P′ sont égales, il faut que Q'_1 et P'_1 le soient aussi; d'où il suit que ces deux forces se détruisent et qu'il ne reste à la place de p et de q que les forces P_1 et Q_1 égales à P et Q et dirigées dans le même sens, lesquelles passant par un même point m et tirant dans le même sens, s'ajoutent et donnent à la place des forces q et p une résultante égale à $P + Q$ et parallèle à ces deux forces.

Donc, quelque soient les grandeurs des deux forces tirant parallèlement dans le même sens, les conséquences suivantes leur sont applicables.

1°. *Elles ont une résultante commune parallèle à leur direction, et égale à leur somme.*

2°. *Cette résultante coupe la droite qui joint leurs points d'application en deux parties, qui sont réciproquement proportionnelles aux composantes.*

10. Si maintenant au lieu de deux forces, vous en aviez un nombre quelconque P, P', P'', P'''........ etc., vous voyez bien que vous pourriez composer la première P avec la seconde, ce qui vous donnerait une résultante R parallèle à P, et égale à $P + P'$; puis ensuite composer R avec P'', ce qui vous donnerait une seconde résultante R' parallèle à la première, et égale à $P'' + R$ ou $P + P' + P''$, et qui combinée avec P''' vous donnerait une troisième résultante égale à $P + P' + P'' + P'''$..... et ainsi de suite : en sorte que vous voyez que quelque fût le nombre des forces, on parviendrait à les remplacer par une seule, parallèle à leur direction commune et égale à leur somme; conséquence bien importante, mais qui, renfermant des particularités remarquables, sera développée avec le détail nécessaire dans une prochaine leçon.

Vous trouverez du reste de nombreux exemples de cette résultante unique, qui remplace l'action de plusieurs forces parallèles : tel est particulièrement l'attelage de plusieurs chevaux devant un char, lorsque ces chevaux sont placés de front; il n'est pas difficile de voir que dans ce cas, chacun

des chevaux agit sur le char, suivant une droite parallèle à la direction qu'on veut lui imprimer; ainsi, il y a autant de forces parallèles qui tirent le char qu'il y a de chevaux attelés. Or, d'après ce que nous avons vu, toutes ces tractions parallèles pourront se réduire en une seule qui sera leur résultante et que vous pourrez facilement déterminer lorsque vous connaîtrez la force individuelle et la position de chaque cheval. Il suit d'ailleurs de ce que nous avons dit plus haut, que cette résultante sera équivalente à la somme de toutes les composantes ou, si vous le voulez, de toutes les tractions; ce qui prouve que l'action totale exercée par les chevaux de front est la même que celle exercée par ces mêmes chevaux s'ils étaient attelés à la file.

Or, on observe que les chevaux dans le premier système d'attelage, agissent d'une manière plus simultanée, tandis que dans le second, il est rare qu'ils tirent tous à la fois; d'une autre part, les mouvemens qu'on veut leur imprimer peuvent leur être indiqués d'une manière plus rapide : vous voyez donc qu'en général l'attelage des chevaux de front est préférable, dans les cas où on peut l'employer, à celui des chevaux de file. C'est ainsi que les choses même les plus dépendantes en apparence de la routine et de l'expérience, rentrent toujours par quelque point dans le domaine de la science que nous traitons.

STATIQUE.

TROISIÈME LEÇON.

Continuation de la leçon précédente : centre des forces parallèles ; centre de gravité.

1. Nous venons de voir que si deux forces parallèles P et Q tirant dans le même sens, sont appliquées à deux points A et B d'un corps solide, ces deux forces peuvent être représentées par une force unique R passant par un point C de la ligne AB, tel que l'on ait :

$$AC : BC :: Q : P$$

et en outre que cette force R est égale à la somme des composantes P et Q, en d'autres termes :

$$R = P + Q.$$

Mais, comme dans toute proportion le produit des extrêmes est égal, comme nous le savons, au produit des moyens, la proportion précédente nous donne :

$$P \times AC = Q \times BC.$$

Mais nous savons encore :
d'une part que $AB = AC + BC$

Ce qui donne :

$$AC = AB - BC$$

et d'une autre part que

$$R = P + Q$$

Ce qui donne :

$$Q = R - P$$

En sorte que nous aurons évidemment :

$$P \times AC = P \times (AB - BC) = P \times AB - P \times BC$$

et $Q \times BC = (R - P) \times BC = R \times BC - P \times BC$.

Or, puisque $P \times AC$ est égal à $Q \times BC$, il faudra donc aussi que l'on ait

$$P \times AB - P \times BC = R \times BC - P \times BC,$$

égalité qui ne cessera pas d'avoir lieu si on ajoute de chaque côté du signe $=$, la quantité $P \times BC$; mais qui devient alors

$$P \times AB = R \times BC.$$

Or, puisque deux produits égaux peuvent refaire une proportion en prenant les deux termes d'un de ces produits pour les extrêmes et les deux autres pour les moyens, on déduit de l'égalité précédente

$$P : BC :: R : AB. \ (m)$$

d'une autre part la proportion primitive

$$AC : BC :: Q : P$$

peut encore se mettre sous cette forme :

$$Q : AC :: P : BC$$

d'où il suit, que le rapport de Q à AC est le même que celui de P à BC, lequel est le même, d'après la proportion *m*, que celui de R à AB, en

sorte que ces trois rapports sont égaux entre eux; ce qui donne :

$$P : BC :: Q : AC :: R : AB.$$

Ce résultat est remarquable, et si vous le comparez avec la figure, vous trouverez facilement qu'il est l'écriture du théorême suivant :

Etant données trois forces parallèles tirant dans le même sens, dont une est la résultante des deux autres, si vous menez arbitrairement une droite qui coupe ces trois forces A, B et C, chacune de ces trois forces sera représentée par la portion de la droite arbitraire comprise entre les deux autres forces.

Vous voyez effectivement que, dans l'exemple précédent P, est représenté par BC, Q par AC, et R par AB.

2. Si vous vouliez, pour deux forces données, construire le point où passe la résultante, vous n'auriez qu'à calculer la distance de ce point à l'un des points d'application, le point A, par exemple : pour cela vous n'avez qu'à vous rappeler l'égalité $Q \times AB = R \times AC$, d'où vous tirerez facilement celle-ci :

$$AC = \frac{Q}{R} \times AB$$

et comme R est égal à P + Q, cette égalité deviendra

$$AC = \frac{Q}{Q+P} \times AB.$$

Or, puisque vous êtes censés connaître Q et P, il vous sera facile de déterminer le rapport de Q à Q + P, et, par conséquent, le nombre par lequel vous devez multiplier AB pour trouver AC.

Au reste, sans passer par aucune formule algébrique, vous pourrez, pour des cas simples, trouver la distance du point C aux points A ou B.

Supposons, par exemple, que la force P soit égale à quatre fois la force Q : il est visible que la résultante R sera égale à cinq fois la force Q ; mais, d'après ce que nous avons vu (1), les forces sont entre elles chacune comme la portion de la droite AB comprise entre les deux autres forces, en sorte que le rapport de la longueur AC à la longueur AB, doit être le même que celle de la force Q à la force R ; or, la force Q est le cinquième de la force R ; donc la ligne AC est le cinquième de la ligne AB.

Vous voyez aussi comment, à la place d'une force R qu'on supposerait donnée, on peut substituer deux autres forces P et Q qui passeraient par des points donnés A et B, car vous n'auriez pour cela qu'à observer que les deux forces P et Q doivent être choisies de manière à ce que R soit leur résultante. Or, d'après cela, menant une droite AB par les points donnés A et B, cette droite coupera la direction de la force R en C, et on aura les proportions

P : R :: BC : AB, Q : R :: AC : AB

au moyen desquelles on pourra déterminer facilement P et Q.

Supposons, par exemple, que la droite AB soit coupée par la force R donnée de manière à ce que l'on ait

$$BC = 4AC$$

il résultera delà, que AB sera égal à 5AC; d'où il suit, que le rapport de Q à R sera le même que de 1 à 5, en sorte que la force cherchée Q sera le cinquième de la force donnée R.

D'une autre part, la distance BC sera visiblement les quatre cinquièmes de AB, d'où il suit facilement que la force P doit être aussi les quatre cinquièmes de la force R.

Remarquez en passant que ces deux forces ainsi déterminées, satisfont à la condition que leur somme soit égale à leur résultante, car la somme de P et de Q se compose évidemment de quatre cinquièmes de R plus un cinquième de R, en un total des cinq cinquièmes de R, ce qui équivaut à R tout entier. Ceci peut vous servir de confirmation pour la légitimité de notre calcul.

3. Une chose bien remarquable, c'est que dans tout ce que nous avons dit jusqu'à présent, nous n'avons tenu aucun compte de la direction commune de nos forces : en effet, elle n'entre pour rien dans la détermination du point C, détermination qui ne dépend que de la longueur de AB et des valeurs de P et de Q, en sorte que ce point

C sera toujours le même quelque soit la direction des forces P et Q, pourvu que les forces P et Q conservent la même valeur et que les points A et B ne changent point.

D'une autre part on voit que la valeur de la résultante ne changera pas non plus, puisqu'elle est toujours égale à $P + Q$; donc :

Si l'on fait varier arbitrairement la direction commune de deux forces parallèles, en conservant pourtant la position de leurs points d'application et leurs valeurs, la résultante de ces deux forces, en suivant leur nouvelle direction, ne changera pas de valeur et ne cessera pas de passer par un point constant.

4. Ce théorême se généralise d'une manière facile, et se change alors en un principe très-important que nous allons reconnaître.

Soient A, A', A'', A'''... etc. les différens points d'un corps ou système solide, auquel on suppose appliquées des forces P, P', P'', P'''...... parallèles entre elles, d'une grandeur donnée et tirant dans le même sens.

Nous avons vu dans la leçon précédente que toutes ces forces avaient une résultante unique, qu'on obtenait en déterminant :
d'abord la résultante R de P et P',
ensuite la résultante R' de R et P'',
puis la résultante R'' de R' et P''',
et ainsi de suite, à la fin de quoi on trouve celle qui représente toutes les forces du système.

Supposons maintenant, que l'on change la direction commune de toutes ces forces en conservant leurs valeurs et la position de leurs points d'application, et voyons ce qui en résultera.

D'abord la résultante R de P et P′ conservera la valeur P + P′ comme auparavant, et son point d'application ne changera pas, en sorte qu'elle ne subira d'autre influence que de prendre la nouvelle direction des forces P, P′, P″......... Au lieu de l'ancienne.

Il en sera de même de la résultante R′ de R et P″. Elle conservera aussi sa valeur et son point d'application, en prenant seulement la nouvelle direction. La même chose aura lieu pour toutes les résultantes successives et aussi pour la résultante totale du système, en sorte que celle-ci passera par le même point d'application que dans le cas de la direction primitive, et conservera la même valeur, qui est P + P′ + P″ + P‴........ Seulement sa direction sera changée, puisqu'elle sera parallèle à la nouvelle direction que nous avons supposée aux forces. Donc :

Quelque soient les directions successives d'un système parallèle de forces tirant dans le même sens les différens points d'un corps solide, pourvu que ces points ne changent pas leur position respective et que les forces conservent la même valeur, il y aura dans le système un point invariable par lequel passera toujours la résultante de toutes ces forces ; cette résultante en outre, sera toujours parallèle à la direction commune des forces et égale à leur somme.

Ce point invariable s'appelle *centre des forces parallèles :* nous verrons bientôt le rôle important qu'il joue dans la science de l'équilibre des corps solides.

5. Il nous sera facile maintenant de nous rendre compte de la manière dont la pesanteur agit sur les corps, et de voir comment on peut en apprécier l'effet.

Tout le monde sait qu'en enlevant un corps de la surface de la terre et en l'abandonnant ensuite à lui-même sans appui, il prend de suite un mouvement vers cette surface en suivant une ligne qui jouit de la propriété d'être perpendiculaire à la surface des eaux dormantes, laquelle prolongée suffisamment passerait par le centre de la terre, et qu'on distingue par le nom de verticale.

Ce phénomène qu'on nomme chûte des corps, est la conséquence d'une propriété de la matière qu'on appelle affinité et attraction, lorsqu'on la considère entre des molécules, et pesanteur dans le cas dont nous parlons.

Il paraît que les molécules s'attirent en raison directe de leurs masses et inverse du carré de la distance ; en sorte que (fig. 7) deux molécules M et M′ dont les masses seraient représentées par m et m' et la distance des centres par AB seraient attirées l'une vers l'autre par une force proportionnelle à $\frac{m + m'}{\overline{AB}^2}$.

Cette loi s'étend jusqu'à la terre elle-même; en sorte que la terre se comporte à l'égard des molécules des corps qui se trouvent à sa surface, de la même manière que le ferait une molécule simple et homogène mais d'une grosseur immense, et que chaque molécule se trouve attirée vers la terre par une force proportionnelle à la masse et inverse du carré de sa distance au centre de la terre. (*)

Mais lorsqu'on considère deux molécules homogènes et de même masse, assez proches l'une de l'autre, on peut considérer les distances de ces molécules au centre de la terre comme égales, et, en vertu de leur grand éloignement du centre de la terre, on peut regarder comme parallèles les directions des forces qui les tirent vers ce centre : de telle façon qu'on en conclut, pour les corps qui sont à la surface de la terre, qu'on peut considérer toutes les molécules qui les composent comme sollicitées par des forces égales et parallèles tirant toutes dans un même sens, lequel est normal à la surface du globe terrestre. C'est là ce qui constitue l'état d'un corps soumis à la pesanteur terrestre, car on nomme pesanteur cette force d'attraction exercée par le globe sur les molécules.

Or, un tel état est analogue à celui que nous avons traité au commencement de cette leçon,

(*) Voir la note à la fin de la leçon.

ainsi nous en pourrons tirer les conséquences suivantes :

I. *Toutes les forces de la pesanteur qui agissent sur les molécules d'un corps, ont une résultante unique.*

II. *Cette résultante est égale à la somme des forces qui agissent séparément sur les molécules : par conséquent, elle est proportionnelle au nombre des molécules et par suite, à la masse du corps.*

III. *Cette résultante se nomme le poids du corps; ainsi le poids d'un corps, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnel à sa masse.*

Voilà encore un résultat de la plus grande utilité, car vous voyez qu'il peut servir à estimer les masses relatives des corps homogènes, ce qui, comme nous l'avons vu, est d'une haute importance dans la mesure des forces qui mettent les corps en mouvement : en voici un autre qui n'est pas moins important.

6. Nous avons vu que dans tout système de points sollicités par des forces parallèles, il y a un point fixe par lequel la résultante de ces forces passe toujours, quelque soit la direction des forces, pourvu qu'elles conservent leur parallélisme et leurs valeurs, et que les points d'application ne changent point leur position réciproque. Ce point est ce que nous avons appelé centre des forces parallèles.

Or, que l'on change la direction des forces en laissant le corps immobile ou qu'on fasse mouvoir

le corps en conservant la direction et les points d'application des forces, il est visible que les conséquences seront toujours les mêmes; en sorte que quelque soit la position du corps et du centre des forces parallèles, la résultante de ces dernières ne cessera pas de passer par le centre.

Cette observation est parfaitement applicable aux corps soumis à l'action de la pesanteur; car il est visible que quelque soit la position d'un corps pesant, toutes les forces qui sollicitent les molécules ne cesseront pas d'être parallèles et égales entre elles, tandis que les positions réciproques de leurs points d'application ne changeront pas.

Ainsi : *quelque soit la position qu'on donne à un corps à la surface de la terre, la résultante des pesanteurs de ses molécules passera toujours par un même point, lequel sera lié au corps par des rapports invariables de position.*

Ce point qui n'est autre chose que le centre des forces parallèles de la pesanteur, prend dans ce cas particulier le nom de *centre de gravité.*

Ainsi tout corps solide a un centre de gravité, et le poids d'un corps passe toujours par ce centre de gravité. Ce résultat est important à observer, puisqu'on voit qu'ainsi on pourra de suite estimer le poids d'un corps au moyen de la résistance qu'on doit appliquer à son centre de gravité pour l'empêcher d'obéir à la pesanteur.

D'une autre part, on voit que tout corps dont

le centre de gravité est fixe, est en équilibre de lui-même s'il n'est soumis qu'aux forces de la pesanteur : en effet alors la résultante de toutes ces forces est détruite par l'immobilité du centre de gravité par lequel elle passe, et son effet étant nul de cette manière, l'équilibre doit avoir lieu.

Enfin on sent que lorsqu'on aura à considérer l'équilibre d'un corps pesant soumis à des forces quelconques, il sera facile de ramener les recherches d'équilibre aux cas des systèmes sans pesanteur : pour cela on déterminera le centre de gravité du corps, puis on appliquera à ce point, dans la direction d'action de la pesanteur, une force égale au poids du corps : on pourra ensuite faire entrer cette force comme les autres dans les conditions de l'équilibre et se dispenser par là d'avoir égard aux actions partielles exercées par la pesanteur sur chaque molécule.

7. Vous voyez donc qu'il importe de trouver des moyens de déterminer, pour des corps d'une figure donnée, le centre de gravité. C'est ce dont nous allons nous occuper : nous trouverons chemin faisant plusieurs propriétés de ce point remarquable.

Remarquons d'abord que si on suppose un corps composé de plusieurs parties, chacune formera un corps à part qui aura aussi son centre de gravité et son poids; en sorte que l'ensemble des forces de la pesanteur pourra être considéré comme représenté par un certain nombre de forces parallèles entre elles,

proportionnelles à ces différens poids et appliquées aux différens centres de gravité, dont nous avons parlé. Il est visible que dans ce cas, la résultante de toutes ces forces sera le poids total du corps et leur centre sera le centre de gravité : de sorte que vous voyez facilement comment on peut déterminer le centre de gravité et le poids d'un corps quand on connaît ces deux choses pour chacune de ses parties : ce théorême nous servira plus tard.

D'une autre part il est visible que pour les corps homogènes, les poids sont proportionnels aux masses et, par conséquent, aux volumes; d'où il suit que les forces parallèles dont nous avons parlé ci-dessus ne dépendent, pour leur valeur, que du volume des parties composantes du corps, et, pour leur point d'application, que de la forme de ces parties; ce qui fait que le centre de ces forces ou le centre de gravité ne dépend vraiment que de la forme du corps, tandis que la résultante ou le poids de ce corps dépend uniquement de son volume.

Maintenant si vous vous reportez au théorême du numéro 1, il vous sera facile de voir que le point C n'étant déterminé que par le rapport des forces P et Q, il serait toujours le même, si au lieu de ces forces on avait les forces de 2P et 2Q, 3P et 3Q, etc., puisque l'on a

$$P : Q :: 2P : 2Q :: 3P : 3Q\ldots\ldots$$

Ce raisonnement peut d'ailleurs s'appliquer facilement à un système quelconque de points et de

forces, en sorte, par exemple, que si au lieu (n°. 4) des forces P, P′, P″....., on avait les forces 2P, 2P′, 2P″......, 3P, 3P′, 3P″..... les points d'application restant toujours les mêmes et les forces restant parallèles, on voit clairement que le centre de ces forces parallèles ne serait pas changé.

Il résulte delà que si, sans changer la forme d'un corps, on changeait seulement sa nature, les poids de ses molécules varieraient, mais leurs points d'application restant les mêmes et leur rapport étant toujours le même aussi, le centre de gravité ne changerait pas de place; d'où il suit, *que la position du centre de gravité d'un corps homogène quelconque dépend, comme nous l'avons déjà dit, de sa forme et point du tout de sa nature.*

8. Tout cela fait qu'on peut considérer la question de la détermination du centre de gravité d'un corps homogène comme un vrai problème de géométrie dans lequel il n'y a que des formes déterminées à considérer.

C'est ce que nous allons voir encore plus clairement en traitant successivement de la recherche du centre de gravité des lignes, des surfaces et des solides : quoique nous ne puissions considérer ici que des cas particuliers, néanmoins ce que nous en ferons suffira pour jeter de la lumière sur les aperçus généraux que je viens de vous donner.

Des centres de gravité des lignes.

9. Vous ne pourriez guères vous faire une idée du centre de gravité d'une ligne droite ou courbe, en la considérant sous le point de vue mathématique : en effet, une telle ligne n'ayant ni épaisseur ni largeur ne peut avoir aucun poids et, par conséquent, échappe aux notions que nous avons données plus haut; il ne peut y avoir d'autre moyen d'expliquer ce qu'on entend par centre de gravité d'une ligne que de la supposer composée d'une infinité de molécules ou très-petites sphères mises bout à bout (fig. 8), ayant des rayons égaux et dont les centres se trouvent sur la ligne dont il est question. On voit alors que chaque centre peut être regardé comme le point d'application d'une force parallèle à la pesanteur et égale au poids de la molécule. Le centre de ces forces parallèles est alors le centre de gravité de la ligne.

Il suit delà, qu'on obtiendrait d'une manière assez exacte le centre de gravité de toute ligne donnée regardée comme pesante, en divisant cette ligne en un très-grand nombre de parties toutes égales entre elles, et en regardant chacun des points de division comme le point d'application d'une force d'une direction donnée et d'une même valeur pour toute l'étendue de la ligne. C'est effectivement le seul moyen qu'on puisse employer

dans un grand nombre de circonstances ; mais comme il n'est jamais d'une grande rigueur, il est essentiel de connaître quelques-uns des cas où l'on peut procéder d'une manière parfaitement exacte à la détermination du centre de gravité d'une ligne.

Si la ligne est droite, comme AB, il est facile de voir que le centre de gravité ne peut être plus proche de A que de B, en sorte qu'il doit se trouver à égale distance de ces deux points et, par conséquent, sur une droite CD, perpendiculaire à la droite AB et passant par son milieu ; d'une autre part il est clair que ce centre de gravité ne pourra être situé dans aucun point de cette perpendiculaire pris hors de la droite AB ; car s'il se trouvait, par exemple, en D, on voit qu'il n'y aurait pas de raison pour qu'il ne se trouvât pas aussi bien en D', de l'autre côté et à la même distance de la droite AB, les choses étant disposées symétriquement de chaque côté de cette droite ; ainsi donc, il devra n'être ni au dessus ni au dessous du point C ; il sera par conséquent en C ; donc :

I. *Le centre de gravité d'une droite terminée à ses deux bouts et d'une longueur arbitraire est situé au milieu de cette droite, et son poids est proportionnel à sa longueur.*

C'est en s'appuyant sur cette propriété, que *Stevens*, un des géomètres distingués de notre

pays, était parvenu à une démonstration fort ingénieuse, que voici, de la composition des forces parallèles.

Supposez une droite arbitraire AB, (fig. 10) soumise à l'action de la pesanteur : prenons un point quelconque C sur cette droite, nous l'aurons de cette manière divisée en deux parties AC et BC, dont chacune aura un poids proportionnel à sa longueur ; cherchons où ces poids agissent : le poids P de AC aura visiblement son point d'application en A′ milieu de AC, et le poids Q de la droite BC en C′ milieu de BC, ces deux poids étant du reste proportionnels à leurs lignes respectives AC et BC ; en sorte que tout le système sera soumis à l'action de deux forces, l'une proportionnelle à AC appliquée en A′, l'autre à BC appliquée en B′. La résultante de ces deux forces sera évidemment le poids de la ligne totale AB, et son point d'application sera le centre de gravité de cette droite ; or, ce centre de gravité, comme nous le savons, est placé en M milieu de la droite AB ; donc d'abord : *la résultante des forces* P *et* Q *est égale au poids de la somme des droites* AC *et* BC, *ou à la somme de leurs poids, c'est-à-dire, à* P + Q, *ce qui est conforme à ce que nous avons déjà vu.*

Ensuite, puisque AA′ est la moitié de AC et que BB′ est la moitié de BC, le rapport de AA′ à BB′ doit être le même que de AC à BC, et par

conséquent, de P à Q; d'où il suit que l'on doit avoir

$$P : Q :: AA' : BB'.$$

Mais d'une autre part puisqu'on a aussi

$$A'C = \frac{1}{2} AC, \text{ et } B'C = \frac{1}{2} BC$$

on doit avoir encore

$$\overline{A'C + B'C} \text{ ou } A'B' = \frac{1}{2} (\overline{AC + BC}) = \frac{1}{2} AB.$$

ou

$$A'B' = AM$$

retranchant de part et d'autre A'M il vient

$$A'B' - A'M = AM - A'M$$

ou

$$B'M = AA'$$

et comme le même raisonnement peut se faire pour les lignes BB' et A'M, l'on trouvera aussi

$$A'M = BB',$$

ce qui fait qu'à la place de la proportion

$$P : Q :: AA' : BB'$$

on peut écrire celle-ci

$$P : Q :: B'M : A'M.$$

C'est-à-dire, que la *résultante des deux forces parallèles P et Q coupe la droite qui joint leurs.*

points d'application en deux segmens réciproquement proportionnels à ces forces : théorême déjà connu, mais que j'ai cru devoir vous représenter de nouveau, à cause de l'originalité et de la simplicité de sa démonstration.

10. Lorsqu'on sait ainsi trouver le centre de gravité d'une droite, on peut trouver facilement celui d'un assemblage quelconque de droites.

Soit, par exemple, à trouver le centre de gravité du contour d'un triangle ABC (fig. 11.)

Soient d'abord *a*, *b* et *c*, les milieux des côtés BC, AC et AB; ces points seront les centres de gravité des côtés dont ils sont les milieux et, par conséquent, on peut les considérer comme points d'application de trois forces parallèles entre elles et à la pesanteur terrestre, et égales l'une au poids de la droite AC, l'autre au poids de la droite BA, la troisième au poids de la droite BC. Les deux premières appliquées en *b* et en *a* ont une résultante égale à leur somme et qui doit passer par un point *d* de la droite *ba* tel que les longueurs *ad* et *bd* soient en raison inverse de leur grandeur et, par conséquent, des poids des côtés AC et BC, ou en raison inverse des longueurs de ces mêmes côtés, en sorte qu'on doit avoir

$$bd : ad :: BC : AC :: bc : ac,$$

vu que *bc* est évidemment la moitié de BC, ainsi que *ac* est la moitié de AC.

Il suit delà qu'on trouvera facilement ce point *d* : pour cela il ne faut que mener la droite *cd* qui partage en deux parties égales l'angle *bca*; l'endroit *d* où cette droite rencontre le côté *ba* donnera évidemment la proportion suivante :

$$bd : ad :: bc : ac,$$

et, par conséquent, sera le point cherché.

Maintenant il faudra composer la force appliquée en *d* avec celle appliquée en *c* qui est le poids du côté AB : mais, sans aller plus loin, on voit que la résultante aura son point d'application quelque part sur la droite *cd* et cela, comme vous l'allez voir, nous suffit.

En effet, si nous avions mené du point *b* la ligne *be* qui partage en deux parties égales l'angle *abc*, nous aurions pu démontrer, comme tout à l'heure, que la résultante cherchée doit aussi passer quelque part par cette ligne; elle devra donc avoir son point d'application à la fois sur ces deux droites, et, par conséquent, à leur rencontre. Donc le point d'application de la résultante de toutes les forces de la pesanteur qui agissent sur le contour du triangle donné, ou, en d'autres termes, le centre de gravité de ce contour, se trouvent en O au point de rencontre des deux droites *cd* et *be*.

Or, si vous y prêtez quelque attention, il vous sera facile de voir que ce point O est le centre du cercle inscrit au triangle *abc* : delà résulte le théorème suivant :

II. *Si dans un triangle ABC quelconque, vous inscrivez un autre triangle abc dont les sommets soient respectivement les milieux des côtés du premier, le centre du cercle inscrit dans ce dernier triangle sera le centre de gravité du triangle ABC.*

Vous trouveriez par des voies de composition semblables le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque, et il ne vous sera pas difficile de tirer de ce que nous avons dit cette autre conclusion :

III. *Si à tous les milieux des côtés supposés pesans d'un polygone, on applique des forces parallèles et respectivement proportionnelles aux poids ou aux longueurs des côtés par le milieu desquelles elles passent, le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité du contour du polygone.*

IV. Il est visible que *le centre de gravité de la circonférence d'un cercle est le centre même du cercle;*

Celui du contour d'une ellipse est aussi évidemment placé à la rencontre du grand et du petit axe de l'ellipse. C'est ce qu'on appele le centre de l'ellipse.

Nous verrons ailleurs le moyen de trouver le centre de gravité de quelques autres courbes, ou portions de courbes.

Du centre de gravité des surfaces.

11. Pour comprendre ce que veut dire une

surface pesante, il faut la regarder aussi comme d'une certaine épaisseur, ou composée d'une multitude de petits solides égaux et juxtaposés; chacun de ces petits solides étant supposé homogène avec les autres, représente une force proportionnelle à son volume. D'une autre part en regardant la surface comme composée de plusieurs rangées rectilignes de ces molécules, on réduit la difficulté à chercher les centres de gravité de ces lignes et à composer leurs poids comme des forces parallèles appliquées à ces centres de gravité. C'est ce que nous allons voir de suite. Mais d'abord nous nous occuperons de surfaces symétriques.

I. *Le centre de gravité d'un parallélogramme rectangle ABCD, se trouve évidemment en O, point d'intersection des deux diagonales du parallélogramme.*

Cela résulte, indépendamment de toute autre considération, de ce que toute droite parallèle à un des côtés du parallélogramme rectangle et passant par le point O, partage cette figure en deux parties rigoureusement symétriques. Ainsi il n'y a pas de raison pour que ce centre soit plutôt en m, par exemple, qu'en m', ces deux points étant placés d'une manière symétrique par rapport au parallélogramme.

Par conséquent, il ne sera ni en m ni en m': ce raisonnement pouvant se faire pour tous les points qui ne sont pas le point O, il en résulte que celui-

ci doit être le centre de gravité, puisque ce centre de gravité ne peut être nulle part ailleurs.

Le centre de gravité d'un carré se détermine évidemment de la même manière.

II. *Le centre de gravité de la surface d'un cercle est au centre de ce cercle.*

Cela dérive encore de ce que cette surface est coupée en deux parties absolument symétriques par chacun de ses diamètres, en sorte que par le raisonnement de l'article précédent, on prouve que son centre de gravité doit être à la fois sur tous ses diamètres. Or, vous savez que le centre du cercle est le seul point qui jouisse de cette propriété; il est donc le centre de gravité demandé.

III. *Le centre de gravité de la surface d'une ellipse est placé à la rencontre de ses deux axes.*

Parce que l'ellipse est symétrique par rapport à chacun de ces deux axes.

IV. En général, *toute figure qui peut être divisée en deux portions symétriques par une droite quelconque a son centre de gravité sur cette droite.*

Cela résulte de ce que le raisonnement que nous avons déjà employé peut s'appliquer à toutes ces figures. Delà vient tout naturellement le théorême suivant :

V. *Tout polygone régulier a pour centre de gravité de son aire le centre du cercle inscrit ou celui du cercle circonscrit à ce polygone.*

Il est facile, en effet, de voir que ce centre jouit

de la propriété de se trouver sur toutes les droites qui coupent le polygone en deux portions symétriques.

VI. Il en est de même des polyèdres réguliers, puisqu'ils sont symétriques, au moins par rapport à trois plans passant par le centre de la sphère circonscrite; ce point doit être le centre de gravité de leur surface, comme il est aussi le centre de gravité de la surface de la sphère.

12. Passons maintenant aux figures irrégulières mais planes, et choisissons d'abord le triangle, auquel, comme la géométrie vous l'a appris, peuvent se rapporter toutes les surfaces planes ou courbes.

Soit donc (fig. 13) un triangle quelconque ABC dont on veut connaître le centre de gravité. Rien ne nous empêche de concevoir sa surface comme composée d'une infinité de petites droites matérielles parallèles à sa base AB et très-proches les unes des autres. Or, chacune d'elles aura son centre de gravité au milieu de sa longueur, et tous ces milieux seront évidemment situés sur une même droite C*c*, allant du sommet C du triangle au milieu *c* de la base opposée. Ainsi le système des forces de la pesanteur est remplacé, dans ce cas, par une série de forces chacune égale au poids d'une des lignes matérielles dont nous avons parlé, et ayant toutes leurs points d'application sur la droite C*c* : or, il est visible que dans cet état de

choses la résultante de toutes ces forces passera par un des points de cette droite et comme son point d'application n'est autre chose que le centre de gravité de la surface du triangle, il en résulte que :

I. *Le centre de gravité d'un triangle* ABC *se trouve toujours sur la droite qui joint le milieu d'un de ses côtés avec le sommet opposé.*

On obtiendra donc ce point en menant outre la droite C*c*, une autre droite A*a*, du sommet A au milieu *a* du côté opposé ; cette droite coupera la première en un point O, qui sera le centre de gravité du triangle.

Menons maintenant la ligne *ac* ; elle sera évidemment parallèle à AC, et, par conséquent, les triangles ACO, *ac*O sont semblables, d'où il suit que l'on aura la proportion

$$AO : aO :: CO : cO :: AC : ac,$$

et par conséquent

$$\overline{AO+aO} : aO :: \overline{CO+cO} : cO :: \overline{AC+ac} : ac.$$

Mais les triangles ABC, *a*B*c* étant semblables et de plus le côté *a*B étant la moitié du côté AB, on doit avoir encore

$$AC : ac :: BC : bC :: 2 : 1.$$

d'où l'on tire

$$\overline{AC+ac} : ac :: \overline{2+1} : 1 :: 3 : 1$$

et par conséquent au lieu de la proportion

$$\overline{AO + aO} : aO :: \overline{CO + cO} : cO :: \overline{AC + ac} : ac$$

il vient, en observant que

$$AO + aO = Aa, \ \overline{CO + co} = Cc,$$
$$Aa : aO :: Cc : cO :: 3 : 1,$$

d'où il suit que la ligne cO est le tiers de la ligne Cc; en d'autres termes :

II. *Le centre de gravité* O *d'un triangle quelconque* ABC *se trouve au tiers de la ligne* Cc *qui joint le milieu de sa base à son sommet, en partant de cette base, et aux deux tiers de cette même droite en partant du sommet.*

Il est visible en outre que *le poids du triangle est proportionnel à sa surface.*

Il vous sera facile de voir que ce point serait le même que le point d'application de la résultante de trois forces égales et parallèles, appliquées aux sommets des angles A, B et C; en effet, le centre des deux premières serait évidemment au milieu de la droite AB, et, par conséquent, il resterait deux forces au lieu des trois; l'une appliquée en c et égale à la somme de celles qui étaient appliquées en A et en B et, par conséquent, double de celle appliquée en C. Il est clair ainsi que la résultante coupera la ligne Cc en O, au tiers de sa longueur, ce qui nous donne le même point O, que nous avons déjà trouvé; ainsi :

III. *Le centre de gravité d'un triangle est le même que celui de trois corps sphériques égaux attachés chacun au sommet d'un de ses angles.*

13. Les trois théorèmes qui précèdent, outre l'intérêt qu'offre leur énoncé, ont pour vous l'avantage de vous donner le moyen de trouver le centre de gravité d'une surface polygonale ou polyédrique quelconque : vous n'avez en effet alors, qu'à diviser le polygone ou les diverses faces du polyèdre en triangles, puis à déterminer, pour chacun de ces triangles, son centre de gravité et son poids. Le problème se réduira alors à trouver le point d'application de la résultante de tous ces poids, ce qui se fera comme nous l'avons déjà vu.

Vous pouvez aussi, quoique à la vérité approximativement, déterminer le centre de gravité d'une surface quelconque, courbe ou plane et limitée par des lignes quelconques, en la supposant décomposée en un nombre très-grand de très-petits triangles, et en cherchant le centre de gravité, de la même manière que pour un polygone ou un polyèdre ; le résultat obtenu sera d'autant plus approchant de la vérité que vous aurez pris les triangles plus nombreux et plus petits.

Au reste, il y a pour obtenir plus d'exactitude, des méthodes très-élégantes et très-générales, dont je tâcherai, dans une de nos prochaines leçons, de vous donner quelque idée, quoique, à proprement parler, elles sortent un peu du plan que je me suis tracé.

Je passe aux centres de gravité des corps solides, ces points étant véritablement ceux qui jouent le rôle le plus important dans les machines. Commençons par les centres de gravité des corps solides qui ont un ou plusieurs plans de symétrie.

14. *Tout corps solide qui peut être coupé par un plan, de manière à ce que les deux parties résultantes soient absolument symétriques par rapport à ce plan, a son centre de gravité sur ce plan.*

Ce théorême se démontre facilement ; car si vous supposez le centre de gravité quelque part hors de ce plan, vous voyez facilement qu'il n'y a pas de raison pour qu'il soit plutôt d'un côté du plan que de l'autre, à cause de la symétrie des parties du corps par rapport à ce plan. Or, comme il ne peut être dans deux endroits à la fois, il y a donc absurdité à le supposer hors du plan et, par conséquent, il faut de nécessité qu'il soit sur ce plan.

Il y a encore un autre moyen de prouver ce principe : en effet, le centre de gravité de chacune des deux moitiés du corps doit être placé par rapport au plan, de la même manière que l'autre, mais symétriquement, c'est-à-dire, que tous deux doivent se trouver sur une même droite perpendiculaire au plan coupant, et à des distances égales de ce plan, ou du point dans lequel il est coupé par la perpendiculaire. Le poids total du corps sera donc la résultante de deux poids égaux

appliqués aux deux extrémités d'une droite que le plan de symétrie coupe en deux parties égales : il est visible que le point d'application de la résultante sera au milieu de la droite et, par conséquent, dans l'endroit où elle coupe le plan de symétrie. Ce point d'application n'étant autre chose que le centre de gravité, on voit donc, comme nous l'avons dit, que ce point est sur le plan de symétrie.

Il résulte delà plusieurs conséquences immédiatement applicables à une classe nombreuse de corps, et qui dispensent de toutes recherches compliquées, pour la détermination du centre de gravité de ces corps. En effet, si un corps a trois plans de symétrie, son centre de gravité est à l'intersection de ces trois plans ; s'il n'en a que deux, son centre de gravité doit être sur la droite commune à ces deux plans, et il ne faudra plus qu'une seule condition pour le déterminer : s'il n'en a qu'un, le centre de gravité sera sur ce plan, et il faudra alors deux conditions de plus pour le déterminer ; ce qui néanmoins est plus simple encore que le cas général.

15. Les polyèdres réguliers et la sphère sont dans le premier cas ; chacun de ces corps a au moins trois plans de symétrie passant par le centre de la sphère circonscrite, et la sphère en a une infinité qui tous passent par son centre ; en sorte que ;

I. *Le centre de gravité d'un corps sphérique est le même que le centre de figure de la sphère.*

Les centres de gravité du tétraèdre régulier, du cube, de l'octaèdre, du dodecaèdre et de l'icosaèdre réguliers, sont placés aux centres des sphères circonscrites à ces polyèdres.

II. *Le centre de gravité d'un parallélipipède rectangle se trouve à l'intersection des trois plans menés par les milieux des trois arêtes d'un même angle trièdre, perpendiculairement à ces arêtes :*

Car ces plans sont chacun un des plans de symétrie du parallélipipède.

Il est d'ailleurs aisé de voir que ce point d'intersection se trouve placé à la rencontre des trois diagonales du parallélipipède, ce qui fournit un autre énoncé du théorème précédent.

III. On verra facilement de même que *le centre de gravité de tout prisme droit, dont la base est un polygone régulier, est placé sur la ligne qui joint les centres des cercles circonscrites aux deux bases, et sur le plan de symétrie mené perpendiculairement à une des arêtes du prisme par le milieu de cette arête : ce qui équivaut à dire qu'il est au milieu de la droite qui joint les centres.*

Il est bon d'observer que tout prisme droit régulier est inscriptible dans une sphère, et que la droite qui joint les centres des cercles circonscrits aux bases, ainsi que le plan de symétrie dont nous avons parlé passent par le centre de cette sphère ; donc :

IV. *Tout prisme droit régulier inscrit dans une sphère a son centre de gravité au centre de la sphère*, théorème qui s'applique évidemment au parallélipipède rectangle.

Il est facile de voir que le cylindre droit à bases circulaires rentre dans le cas des prismes droits réguliers, puisqu'un cercle n'est autre chose qu'un polygone d'une infinité de côtés. Ainsi il a aussi pour centre de gravité le centre de la sphère qui peut lui être circonscrite.

16. Parmi les solides qui ont deux plans de symétrie, on en trouve plusieurs qui sont d'un grand usage dans les arts; tels sont les corps hémisphériques ou les demi boules, les cônes droits, et les pyramides droites. Tous ces corps ont deux plans de symétrie au moins passant tous par une droite perpendiculaire à la base du cône ou du cylindre, ou au grand cercle de la demi sphère, et qui coupe cette base ou ce grand cercle dans son centre de gravité. Il ne reste plus alors qu'à chercher sur cette droite la position du centre de gravité du corps; c'est ce que nous verrons ailleurs: mais le problème est déjà devenu beaucoup plus simple.

Mais il y a une classe entière de corps qui s'y trouvent compris, ce sont les corps de révolution: les corps de révolution, comme vous le savez, peuvent être considérés comme engendrés par le mouvement d'une figure arbitraire tracée sur un

plan qu'on assujettit à se mouvoir autour d'une droite fixe. La portion d'espace que cette figure occupe dans ses positions successives autour de la droite forme le corps. Un jeu dont s'amusent les enfans peint assez bien cette génération : si vous prenez une large pièce de monnaie, et qu'après l'avoir mise dans un plan vertical en l'appuyant sur une table bien unie et en la soutenant avec un doigt, vous lui donnez avec l'autre main, au moyen d'un choc sur un de ses bords un mouvement rapide de rotation, (pl. 2 fig. 15) ce mouvement s'effectue autour d'un axe vertical, et s'il est très-vif, bientôt, au lieu de la pièce de monnaie plate, vous apercevez une véritable sphère qui se meut avec des vitesses et des directions variables sur la table : cette sphère, si elle était autre chose qu'une illusion d'optique, serait le véritable corps de révolution, engendré par le limbe circulaire de la pièce de monnaie.

Tous les corps façonnés sur le tour, les parties principales des vases, des lampes de suspension, des balustrades ; une foule d'objets employés dans les machines sont des corps de révolution. Ils ont tous évidemment une infinité de plans de symétrie, qui passent par l'axe de révolution, ou en d'autres termes, qui sont les diverses positions du plan générateur. Il résulte delà, que leur centre de gravité est sur cet axe.

Il est bien clair que quand même ces corps de

révolution ne seraient pas pleins, si leur vide représente une surface de révolution ayant le même axe de rotation que la première, le centre de gravité se trouvera toujours sur cet axe.

C'est pour cela que les appareils destinés à suspendre les corps de révolution, sont toujours disposés de manière à ce que le point d'appui soit sur le prolongement de l'axe de rotation. En effet, dans ce mode de suspension, l'action de la pesanteur place d'elle-même, pour produire l'équilibre, l'axe verticalement et par conséquent le corps dans une position symétrique par rapport à la verticale, ce qui est surtout utile quand ce corps doit contenir un liquide qu'il importe de ne pas laisser échapper. Tel est le mode de suspension des lampes astrales, des lustres de théâtres, des cloches, des alcarasaz.

Il y a des corps qui sont des combinaisons de figures de révolution et d'autres qui ont plus d'un plan de symétrie, et qu'on dispose de manière à ce que tous les plans de symétrie passent pourtant par une même droite; dans ce cas la droite commune contient visiblement le centre de gravité de l'ensemble. Telles sont quelques lanternes, qui présentent l'assemblage d'une pyramide tronquée droite et de plusieurs corps de révolution qui la recouvrent : telles sont encore les roues des voitures, qui, indépendamment du moyeu et du cercle formé par les jantes, ont encore une série de rayons, dont

l'ensemble est symétrique par rapport à l'axe de l'essieu qui, dans sa partie en contact avec le moyeu, est lui-même une surface de révolution du genre des cônes à base circulaire. Il résulte de cette disposition que la roue est toujours en équilibre autour de l'essieu, et par conséquent, son poids n'entre pour rien dans le mouvement horizontal de la voiture, et n'ajoute rien à l'effort exigé du cheval. (*)

Il existe enfin des corps qui, sans être ni de révolution ni du genre des cônes ou des pyramides droites et régulières, ont encore deux plans de symétrie : telles sont, par exemple, les poires à poudre, et ces bouteilles aplaties, ordinairement revetues d'osier; tels sont en général tous les corps qui peuvent être coupés par des plans parallèles, de manière à présenter des sections semblables et

(*) Je ne crois pas avoir besoin d'observer que ce mouvement absolument horizontal ne se rencontre jamais sur nos routes, en sorte qu'il n'est possible de faire abstraction du poids de la roue que jusqu'à certaine limite : c'est ce que nous verrons d'ailleurs plus tard : le cas dont nous parlons existe cependant réellement dans les chemins de fer bien construits : lorsque nous traiterons des dépenses de forces, nous examinerons avec soin la dépense inutile, occasionnée par les autres routes, non seulement par rapport au poids des roues, mais à celui de l'attirail entier d'un charriot : de pareilles recherches sont ce qu'il y a de meilleur pour montrer les avantages de certaines constructions.

jouissant de la propriété d'avoir deux axes de symétrie, dont les intersections se trouvent sur une même droite perpendiculaire au plan des sections, comme ces ellipsoïdes aplatis qui servent de boîtes à tabac pour les fumeurs; les plats et les soupières elliptiques; les chapes des poulies de marine, et un grand nombre d'objets dont nous faisons tous les jours usage.

Dans tous ces cas la recherche du centre de gravité se réduit à la détermination d'un point sur une ligne donnée, ce qui diminue beaucoup la difficulté; et la connaissance de la droite sur laquelle doit se trouver le centre de gravité suffit seule dans un grand nombre de circonstances.

16. Les corps qui n'ont qu'un seul plan de symétrie, comme les vaisseaux, les barques, les charriots, les brouettes, sont soumis à des opérations plus compliquées pour la détermination de leurs centres de gravité. Nous ne les examinerons pas en particulier, parce que cette recherche, quoique accidentellement plus simple que celle des corps irréguliers, rentre pourtant dans les mêmes principes.

17. *Du centre de gravité des corps irréguliers.*

Comme tous ces corps peuvent, en dernier résultat, être décomposés en tétraèdres ou pyramides triangulaires, nous nous occuperons d'abord de ce corps.

I. *Le centre de gravité d'un tétraèdre est placé sur la droite qui joint son sommet au centre de*

gravité de sa base, et au quart de cette droite à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet.

Vous pouvez en effet concevoir le tétraèdre SABC, (planche II, fig. 14) comme composé d'une infinité de triangles matériels d'une épaisseur extrêmement petite, et il est clair que si vous placez l'œil en S, chacun de ces triangles, le triangle *abc*, par exemple, paraîtra l'image ou la perspective du triangle de la base ABC, en sorte que son centre de gravité *g* sera la perspective du centre de gravité G de la base ABC. Tous les centres de gravité des différentes tranches triangulaires dont nous avons supposé le tétraèdre SABC composé, seront donc sur le rayon visuel SG, ou sur la droite qui joint le point S au centre de gravité de la base.

Maintenant il est clair que l'on peut prendre à son tour B pour le sommet du tétraèdre et SAC pour sa base, en sorte que le centre de gravité cherché se trouvera sur la ligne BH, qui joint le nouveau sommet B avec le centre de gravité H de la nouvelle base SAC.

Menons ensuite les droites BG et SH. Chacune d'elles passant par le sommet et le centre de gravité d'une des faces triangulaires ABC et ASC devra couper en deux parties égales le côté de cette face opposé à ce sommet. Or, pour chacune de ces faces, ce côté opposé est le côté AC; d'où il suit évidemment, que les droites BG et SH vien-

dront se rencontrer sur cette droite en D. D'une autre part, d'après ce que nous savons déjà, la distance DH doit être le tiers de la longueur SD, et la distance DG doit être aussi le tiers de la longueur BD, en sorte que les triangles DHG et SDB sont semblables, et que, par conséquent, le côté GH est aussi le tiers de SB, en même tems qu'il lui est parallèle.

Or maintenant il est visible que les triangles HOG, SOB, sont semblables aussi, ce qui donne la proportion :

$$HO : OB :: GO : OS :: GH : BS :: 1 : 3$$

d'où l'on tire :

$$\overline{HO + OB} : HO :: \overline{GO + OS} : GO ::$$
$$\overline{GH + BS} : GH :: \overline{3 + 1} : 1$$

qui équivaut à ceci

$$BH : HO :: GS : GO :: 4 : 1$$

C'est-à-dire que le centre de gravité O se trouve au quart de la longueur SG en partant de la base, ou aux trois quarts de cette même droite à partir du sommet.

18. Il vous serait facile de voir, en suivant la même marche que pour le triangle, que ce centre de gravité est le même que celui de quatre sphères égales qui seraient placées de manière à ce que leurs centres fussent les quatre sommets du tétraèdre.

19. A présent que vous connaissez le moyen de déterminer le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, il vous sera aisé de concevoir comment on pourrait trouver celui d'un corps polyèdrique ou autre d'une forme quelconque; en effet, il ne faudrait pour cela que décomposer ce corps en tétraèdres qui auraient un sommet commun, puis prendre les centres de gravité de chacuns de ces tétraèdres, et y supposer appliquées des forces respectivement égales aux poids des tétraèdres et parallèles à la pesanteur. La résultante de ces forces parallèles sera le poids total et leur centre sera le centre de gravité du corps ou du système entier.

Nous verrons ailleurs un moyen plus simple et plus élégant : mais ce qui précède suffit pour voir que, dans l'état actuel de nos données, nous pourrions toujours parvenir à trouver le centre de gravité d'un corps donné, et qu'il n'y aurait d'autre difficulté que la longueur plus ou moins considérable de l'opération.

20. Récapitulons rapidement les principaux résultats que cette leçon et la précédente nous ont fournis.

I. Toutes les forces de la pesanteur qui agissent séparément sur les molécules des corps, se composent en une seule qui passe par un point invariable par rapport au corps, et qu'on nomme *centre de gravité* du corps.

II. Cette résultante unique se nomme *poids* du corps.

III. *Le poids d'un corps est proportionnel à sa masse.* D'où il suit que pour connaître l'une de ces choses on n'a qu'à évaluer l'autre.

IV. Toute force qui, appliquée au centre de gravité d'un corps, le tient en équilibre, est égale au poids de ce corps. Ceci, comme vous le verrez plus tard, est le principe sur lequel s'appuye la pesée des corps ou l'évaluation de leurs poids.

V. Il y a un cinquième principe qui sert à vérifier l'équilibre des corps pesans formant un système quelconque, et je vais vous le donner, quoique sans démonstration ; mais vous le concevrez, je pense, facilement.

Un système de corps pesans, liés entre eux d'une manière quelconque, n'est en équilibre que quand son centre de gravité ne peut pas descendre, en supposant que le système fasse un mouvement.

Ce principe peut servir à déterminer l'équilibre d'une foule de systèmes : car le nombre de ceux auxquels on peut l'appliquer est considérable et comprend, comme nous le verrons toutes les machines à enlever les fardeaux.

C'est pour cela qu'une sphère placée sur un plan horizontal reste d'elle-même en équilibre : car, dans aucun de ses mouvemens, son centre ne peut se rapprocher du plan horizontal qui la supporte et, par conséquent, ne peut s'abaisser. Il en

est de même d'un cylindre ou d'un cône droit placé sur un plan horizontal ; parce que les mouvemens obligés de ces corps ne peuvent faire descendre leurs centres de gravité.

VI. Enfin un autre principe qui dérive de celui-ci, c'est que toutes les fois qu'on soulève le centre de gravité d'un corps, cela ne peut se faire qu'au moyen d'une dépense de force, dont la grandeur est proportionnelle à la masse du corps et à l'élévation de son centre de gravité.

C'est pour cela que les voitures exigent plus de force d'attelage pour rouler sur un pavé raboteux que sur un pavé égal, en les supposant du reste tous deux horizontaux : parce que dans le premier cas chaque fois que les roues passent sur un obstacle, elles enlevent le centre de gravité total du fardeau à une hauteur égale à celle de l'obstacle. Ainsi la dépense de force pour produire cet effet augmente avec le poids de la charge et la hauteur des inégalités du sol.

VII. Une autre vérité, qui peut avoir un grand nombre d'applications, c'est que, lorsque le centre de gravité d'un corps peut prendre plusieurs chemins en obéissant à la pesanteur, il choisira celui par lequel il descend le plus vite. Ceci vous explique pourquoi une sphère placée sur un plan incliné descend toujours en suivant une direction telle que son centre ne sort pas d'un plan vertical perpendiculaire au plan incliné.

22. Ce que je viens de vous dire peut vous faire sentir combien est importante la théorie que je vous ai développée sur les centres de gravité. En effet, les applications de cette théorie sont si nombreuses et si usuelles, que vous rencontrerez partout l'occasion d'en faire vous-mêmes : en voici pourtant une qui vous intéressera sans doute.

Le corps de l'homme est, ainsi que celui des animaux, un assemblage compliqué de leviers qui peuvent prendre et prennent effectivement dans les diverses situations du corps une infinité de positions réciproques très-différentes Ces diverses situations changent chaque fois la forme et par conséquent la position absolue du centre de gravité du corps. Cependant dans toutes, une condition essentielle à remplir, c'est l'équilibre; or, comme l'équilibre ne peut avoir lieu que quand le centre de gravité est arrêté par un point ou un plan fixe, cette condition donne lieu à une foule d'habitudes du corps qui se représentent à peu près les mêmes dans les mêmes circonstances, et qu'il peut être utile aux artistes, mais particulièrement aux peintres et aux sculpteurs, d'étudier.

L'homme lorsqu'il marche ou qu'il se repose n'a d'autre point d'appui que ses pieds : dans l'état de repos la perpendiculaire qui passe par son centre de gravité doit donc rencontrer le plan sur lequel il est placé dans un point situé quelque part sur la portion du plan comprise entre les deux pieds;

mais ce centre de gravité lui-même variant suivant les différentes positions, il est bon de savoir comment le placer.

D'abord le centre de gravité du corps de l'homme très-droit est placé dans l'intérieur du bassin, à peu de distance de la colonne vertébrale (voyez le point G dans la planche III, fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.) Il paraît que dans les divers mouvemens du corps les positions que prennent les jambes influent peu sur sa situation, sauf quelques cas particuliers, mais le poids des bras peut en changer beaucoup la situation; en sorte que quand le plan d'appui se déplace, il faut quelquefois, au moyen des bras, y ramener le pied de la verticale qui passe par le centre de gravité de l'ensemble. Dans l'état de repos (planche III, fig. 2, 3, 4.) leur position les écarte peu du corps, ce qui en augmente la stabilité. Vous remarquerez seulement (fig. 3 et 4.) que lorsqu'un des bras avance plus que l'autre, le pied du même côté s'avance aussi pour allonger la surface d'appui dans le sens du mouvement du centre de gravité.

Quelquefois le centre de gravité ne s'appuye que sur un pied : c'est le cas d'un mouvement prochain, puisque cela a pour but de soulager l'autre pied du poids du corps et de lui laisser ainsi le moyen de choisir une nouvelle position sans déranger l'équilibre du système. (fig. 1, 5 et 6). Les figures 5, 6, 7 et 8, planche III, et 2,

3, 4, 5, planche IV, vous démontrent pourquoi, lorsqu'on veut prendre des attitudes qui demandent de grands écarts des bras, dans lesquelles il faut soutenir de grands fardeaux ou des armes, l'on augmente naturellement la distance qui se trouve entre les deux pieds. Vous voyez en effet par là que l'espace dans lequel pourra tomber la verticale du centre de gravité sans rompre l'équilibre étant plus grand, le nombre des positions que l'homme pourra prendre en remplissant la condition d'équilibre, sera beaucoup plus considérable, et qu'ainsi une semblable position sera plus favorable au mouvement. Vous avez des exemples de corps entièrement en équilibre au moyen de résistances extérieures. Tel est l'exemple de la planche IV, fig. 6. Le poids du corps se combine ici avec la tension Q de la corde au moyen de laquelle l'homme veut déplacer l'anneau qu'il tire vers lui. La résultante de ces deux forces doit être dirigée vers le point d'appui de l'homme, c'est-à-dire entre ses deux pieds; ainsi vous voyez que plus la tension de la corde et par conséquent l'effort de l'homme sera considérable, plus sa position pourra devenir inclinée, sans pourtant nuire à l'équilibre.

Je crois vous avoir démontré maintenant que, même dans un dessin, il y a moyen de faire apercevoir la tendance au mouvement, au repos ou à l'effort par la simple position du centre de gravité: la détermination exacte de la position de ce point

étant à la vérité le résultat d'une foule d'élémens qui échappent par leur nature à la rigueur des conceptions géométriques, il serait ridicule de penser à employer le compas et la règle pour composer les figures d'un tableau ou d'une sculpture; mais des études de pose faites avec attention et en ayant toujours présent à l'esprit ce que nous venons de dire sur les centres de gravité, conduisent infailliblement l'artiste à la plus grande exactitude dans la représentation de ces poses, et lui épargneront à la fin non-seulement un tems précieux, mais aussi ces tâtonnemens qui refroidissent le génie, et laissent toujours après eux une trace d'incertitude que l'œil aperçoit bien ensuite quoique sans s'en rendre compte, et qui détruisent souvent l'effet et la vérité du meilleur ouvrage.

Lorsque l'homme est en marche, la nécessité de porter le poids de son corps sur le pied immobile lui fait porter son centre de gravité alternativement sur l'un et l'autre pied : delà résulte évidemment un balancement sensible dans le haut du corps : ce balancement devient une cause de gêne pour une personne qui, placée à côté de l'autre, marche en même tems qu'elle, mais d'un pas différent; car alors tantôt le haut du corps des deux individus s'éloigne, tantôt il se rapproche; ce qui produit des coudoyemens désagréables et fatiguans. Lorsqu'on veut faire marcher de front un assez grand nombre d'hommes, ce coudoyement produit un effet encore

plus fâcheux, et le frottement qui en résulte produit infailliblement la perte de l'alignement et la désunion de la ligne : c'est à cette cause qu'est due le soin qu'on apporte dans l'état militaire à faire marcher les soldats du même pas, comme c'est pour alléger leur marche qu'on leur apprend à porter tout le poids du corps sur le pied immobile. Ces deux principes de la statique militaire, s'ils sont bien observés, peuvent mettre la troupe en état de faire sans beaucoup de fatigue des marches considérables, tandis que leur oubli entraîne les plus graves inconvéniens. On peut remarquer à ce sujet que les vieux soldats accoutumés dès long-tems à prendre dans les rangs la position la plus favorable à la marche en ligne, supportent plus long-tems, malgré souvent des blessures et des infirmités, la fatigue des routes, que de jeunes soldats pleins de force et de vigueur, mais encore peu exercés.

Le maintien du centre de gravité sur un point d'appui fixe fait tout l'art des funambules. Une fois l'équilibre obtenu, ils le conservent dans toutes les positions suivantes, au moyen du poids des bras qu'ils jettent à droite ou à gauche suivant le besoin, pour replacer leur centre de gravité où il doit être soutenu par la corde. Quelquefois ils se servent pour cet usage d'un grand bâton plombé à ses bouts. La chose devient alors plus facile, et avec un peu d'exercice il est aisé d'en venir à bout.

Les sauteurs, lorsqu'ils veulent s'élancer, prennent autant que possible une position où le centre de gravité se trouve sur la direction de la force que la puissance des muscles de leurs jambes et de leurs cuisses va développer : vous en devez facilement sentir la raison. Néanmoins cette position ne peut pas s'obtenir tout-à-fait par l'exercice; il faut une disposition particulière du corps pour y parvenir. Aussi tandis que vous voyez souvent d'excellens coureurs et des danseurs de corde très-adroits, vous voyez rarement de bons sauteurs, même avec une force musculaire considérable.

Beaucoup de tours de forces ne sont que des tours d'équilibre : lorsque vous les verrez avec attention il vous sera aisé de voir à quoi se réduisent souvent ces actes qui annoncent en apparence une force prodigieuse, et qui ne sont, pour la plupart, que des applications adroites de la théorie des centres de gravité.

La théorie des centres de gravité et celle des forces parallèles sont d'une haute importance dans l'art des constructions : elles reparaissent toutes les fois qu'on doit traiter de la stabilité d'un édifice. S'il s'agit d'un toit, par exemple, vous pourrez, connaissant sa forme et son étendue déterminer le poids et le centre de gravité de chaque plan du toit, en le supposant composé seulement de lattes et d'ardoises : or cette surface devant être supportée par un certain nombre de chevrons, vous pourrez

repartir ce poids en autant de forces égales, qui indiqueront l'effort dont chaque chevron doit être capable. Ceux-ci à leur tour sont soutenus par des pièces horizontales qu'on nomme pannes et dont le nombre est donné : vous pourrez donc savoir aussi l'effort que chaque panne doit être capable de supporter à l'endroit où elle soutient un chevron. De pièce en pièce on trouvera ainsi la résistance dont chaque partie d'une charpente doit être capable, tant dans le sens longitudinal que dans le sens transversal, en sorte qu'on pourra par des règles que vous connaîtrez plus tard, déterminer les dimensions d'équarrissage de chaque pièce. (*) De cette manière on n'est point exposé à augmenter inutilement ces dimensions, ce qui augmente considérablement la dépense et a en outre l'inconvénient de charger les murs de l'édifice d'un poids dangereux, dont on n'évite l'effet qu'en donnant à ces murs des épaisseurs considérables, qui changent des maisons en prisons, et des temples en véritables citadelles.

Ainsi à chaque pas nous voyons la géométrie répandre sur les arts de nouvelles lumières et

(*) Je recommande à ceux qui professeront sur la matière que je traite, d'accompagner cette observation d'un exemple : il y a peu de choses plus importantes pour les artisans que d'apprendre que si un usage aveugle détermine trop généralement les dimensions des pièces de construction, il existe néanmoins des méthodes sûres, qui peuvent conduire à des résultats plus avantageux que la routine.

présenter à l'artisan studieux, au mécanicien, à l'architecte de nouveaux moyens d'économie.

NOTE

Sur le parallélisme des forces de la pesanteur.

C'est à Newton qu'on doit la première démonstration ainsi que la découverte du beau principe de l'attraction des sphères, en raison inverse du carré de la distance des centres, et en raison directe de leurs masses : ceux qui sont curieux de ces sortes de choses peuvent voir la curieuse démonstration qui se trouve dans le bel ouvrage intitulé : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, *prop.* 71, *theor.* 31. Il est intéressant de voir par quel artifice de calcul ce grand homme y est parvenu. On en trouvera aussi une démonstration un peu différente, mais fondée sur le même genre de raisonnement dans une de nos notes sur l'hydrostatique.

Quoiqu'il en soit, le parallélisme des forces de la pesanteur n'est rigoureusement vrai que pour des corps peu considérables : il y en a pour lesquels il faudrait avoir égard à la direction concourante. Je vais prendre pour exemple le vaisseau à vapeur *l'Atlas* destiné aux Indes orientales. Ce bâtiment a environ 80 mètres de longueur de tête en tête.

Le quart du méridien, comme nous le savons, est long de 10,000,000 de mètres. Ce quart fait, en le divisant en secondes sexagésimales, 324,000 secondes, en sorte que la longueur du mètre représente 0,00324″. Les 80 mètres de longueur soutiennent donc un arc de 0,2592″ très à peu près, en sorte que l'angle formé par les directions de la pesanteur aux deux bouts du navire est d'un peu plus fort que le quart d'une seconde sexagésimale; valeur déjà appréciable par des instrumens bien faits.

Heureusement l'influence de cet angle sur la position du centre de gravité et du métacentre du navire est si peu de chose, qu'elle rentre dans la classe des erreurs, qui accompagnent la détermination de ces points par la connaissance géométrique des différentes parties qui composent le navire. Quant à la différence entre les pesanteurs des points situés à la surface de la mer et au bout des mats les plus élevés, elle est inappréciable.

STATIQUE.

QUATRIÈME LEÇON.

De l'équilibre d'un corps sur un plan ou sur une surface courbe ; du plan incliné, du frottement et de sa mesure : expériences de Coulomb.

1. Concevons un corps M (planche V, fig. 1), placé sur un plan matériel immobile AB, et pressé sur ce plan par une force P normale au plan et passant par le point de contact C du plan et du corps : il est visible que l'équilibre aura lieu ; car il n'y a aucune raison pour que l'action de la force P le fasse mouvoir dans un sens plutôt que dans l'autre.

Supposons maintenant un corps sollicité par un nombre quelconque de forces qui auraient une résultante unique normale au plan et passant par le point de contact : il est encore visible que cette force résultante tiendra le corps en équilibre.

Donc : *un corps est en équilibre sur un plan, lorsque la résultante de toutes les forces qui le pressent sur ce plan est normale au plan et passe par le point de contact du plan et du corps.*

Nous allons voir que la proposition inverse est également vraie : pour cela il est nécessaire de faire une observation importante. C'est que *si un corps quelconque est en équilibre en vertu de l'action d'un nombre quelconque de forces et de résistances, et qu'on applique à ce corps un autre système de forces également arbitraires, ce dernier système se comportera comme si le corps était absolument libre, de telle façon que s'il n'est pas disposé lui-même à produire l'équilibre, il dérangera celui qui existait déjà.*

Cela posé, concevons un corps animé de tant de forces P, P′, P″...... qu'on le voudra, appliquées aux points *a*, *a′*, *a″*...... et pressé par ces forces contre un plan immobile qu'il touche dans un point C. Imaginons par ce point C une droite normale à la surface de contact du corps avec le plan; et puis par chacun des points *a*, *a′*, *a″*..... concevons deux droites, l'une parallèle au plan matériel, l'autre passant par le point C, mais étant dans un même plan avec la droite qui représente la direction de la force correspondante au point d'application. Vous concevez facilement que chacune des forces P, P′, P″... se décomposera en deux autres dirigées chacune suivant une de ces droites, et dont l'une passera ainsi par le point C, tandis que l'autre sera parallèle au plan matériel : de cette manière tout le système de forces sera remplacé 1°. par un groupe de

forces passant toutes par le point C, et ayant une résultante unique; 2°. par un second groupe de forces toutes parallèles au plan matériel. La résultante du premier groupe se décomposera en deux, l'une située sur le plan matériel, l'autre dirigée suivant la normale à ce plan, dont nous avons déjà parlé, et comme cette dernière est détruite par le plan, on pourra donc considérer le corps comme s'il était libre et soumis seulement à l'action du groupe de forces parallèles au plan matériel et à celle de la force que nous venons de reconnaître dans ce même plan.

Or, d'après ce que nous venons de dire, pour que l'équilibre du corps ait lieu, il faut que toutes ces forces soient en équilibre d'elles-mêmes: ce qui veut dire que le système tout entier doit se réduire à la seule force normale au plan matériel, d'où l'on doit conclure ceci:

Pour qu'un corps soit en équilibre sur un plan matériel, en vertu de l'action des forces qui le pressent sur le plan, il faut 1°. que toutes les forces aient une résultante unique; 2°. que cette résultante unique soit normale au plan matériel, et passe par le point de contact de ce plan et du corps.

Ce principe peut être considéré comme le fondement de ce que nous avons à dire sur l'équilibre des corps appuyés sur des surfaces, et nous en ferons fréquemment usage.

2. Il est bon d'observer qu'il est applicable également aux surfaces courbes. En effet, si le corps M (fig. 2) au lieu d'être pressé sur un plan matériel l'était sur une surface ACB quelconque, en menant par le point C un plan *ab* tangent à cette surface, on peut considérer le corps M comme appuyé sur ce plan en C, puisque le corps lui-même, la surface AB et le plan *ab* ont tous les trois un élément commun en C. Ainsi donc la condition d'équilibre sera la même que tout-à-l'heure, et par conséquent il faudra que la résultante des forces qui pressent le corps soit normale au plan *ab* et passe par le point C; ce qui revient à dire que *pour que le corps M soit en équilibre sur une surface AB qu'il touche en C, il faut que toutes les forces qui pressent ce corps contre la surface aient une résultante unique passant par le point C et perpendiculaire au plan tangent ab ou normale à la surface d'appui.*

3. Après avoir ainsi traité la question en général, revenons à un cas plus particulier et qui a de nombreuses applications dans la mécanique.

Soit un plan matériel inébranlable AC (fig. 3) faisant avec l'horizon AB, un angle CAB égal à α et sur ce plan un corps sollicité par son poids P et retenu par une force Q parrallèle au plan AC : proposons-nous de chercher les relations qui existent entre les deux forces P et Q dans le cas de l'équilibre.

D'abord la résultante R de ces deux forces doit être normale au plan incliné, et comme elle doit être aussi dans le plan de ses composantes, il en résulte que le plan de ces dernières doit être perpendiculaire au plan incliné ; d'où il suit que la force Q doit être située dans un plan vertical perpendiculaire au plan incliné, et ainsi qu'elle doit être dirigée dans le sens de la ligne de plus grande pente sur ce plan.

Ainsi : *la force qui retient sur un plan incliné un corps sollicité par la pesanteur, doit être dirigée parallèlement à la ligne de plus grande pente tracée sur ce plan.*

Delà vous pouvez tirer cette conséquence, savoir : que la pesanteur agit sur un corps placé sur un plan incliné suivant la ligne de plus grande pente de ce plan ; ce qui vous explique pourquoi les corps graves abandonnés alors à leur poids, descendent en suivant cette droite.

Maintenant prenons de O en R la longueur OR qui représente en direction et en grandeur la résultante R des forces P et Q, et formons le parallélogramme OPRQ. Les forces P et Q seront visiblement représentées, l'une par la droite OP, l'autre par la droite OQ ou par la droite PR qui lui est égale.

D'une autre part, la droite OR doit être perpendiculaire au plan incliné et par suite à la droite AC, en sorte que les triangles OQR et ABC sont

semblables, BC étant une droite menée perpendiculairement à l'horizon.

D'après cela on a la proportion :

$$\overline{QR} \text{ ou } \overline{OP} : \overline{OQ} : \overline{OR} :: \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB}.$$

Mais on a

$$P : Q : R :: \overline{OP} : \overline{OQ} : \overline{OR}$$

d'où il résulte évidemment

$$P : Q : R :: \overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB}.$$

Ainsi, tandis que le poids du corps est représenté par l'hypothénuse $\overline{AC}$ du triangle rectangle ABC, les côtés $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ de ce même triangle représentent, l'un la force qui presse le corps sur le plan, l'autre celle qu'il faudrait employer pour empêcher le corps de descendre en s'abandonnant à la pesanteur.

Les trois côtés de ce triangle rectangle portent des noms particuliers. L'hypothénuse se nomme la *longueur* du plan incliné, le côté $\overline{AB}$ s'appelle la *base* du plan, et le côté $\overline{BC}$ en est la *hauteur :* nous désignerons désormais ces trois lignes par les les lettres L, B et H, et nous aurons pour le rapport de nos forces.

$$Q : P :: H : L$$

et

$$R : P :: B : L.$$

Il résulte delà que la longueur du plan incliné restant la même ainsi que le poids P, l'effort Q nécessaire pour retenir le corps sur le plan AC, sera d'autant moins considérable que la hauteur sera moins grande, tandis que dans les mêmes circonstances la pression supportée par le plan augmentera, puisque la base B augmente.

4. (*) Cette propriété du plan incliné est remarquable et sert de base à beaucoup d'appareils de construction et de levage.

(*) Stevinus ou plutôt Stevens, a cherché de ce principe une démonstration directe que je rappellerai ici à cause de sa simplicité ingénieuse.

Il suppose (fig. 4) un fil sans fin flexible et pesant placé sur le plan incliné de manière à l'envelopper en faisant au-dessous du plan une espèce de guirlande $\overline{ADB}$.

Dans cet état il établit que l'équilibre doit avoir lieu, car s'il n'avait pas lieu, il faudrait que le mouvement commençât par un endroit ou l'autre, et à chaque position les choses se trouvant comme au premier moment, ce mouvement devrait être continu, ce qui est absurde. Ainsi ce fil doit être en équilibre.

Or, dans cet équilibre la portion $\overline{ADB}$ n'entre pour rien, car elle doit être en équilibre d'elle-même, donc le deux fils $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ sont en équilibre en vertu de leur pesanteur.

Mais les pesanteurs qui agissent sur ces fils sont en raison directe de leurs longueurs ou des longueurs $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$; d'une autre part la tension du cordon $\overline{ACB}$ est proportionnelle à la pesanteur du cordon $\overline{BC}$, et

Vous en voyez tous les jours des exemples dans le chargement des vaisseaux, sur lesquels on fait monter les tonneaux ou les ballots au moyen de plans inclinés solides qui joignent le bateau au rivage : au moyen de cordes ou de leviers, on fait glisser ou rouler les fardeaux sur ces plans inclinés, et d'après ce que nous avons vu, vous devez maintenant comprendre quel sera l'avantage de cet appareil : en effet, la force nécessaire pour faire avancer le fardeau ou l'empêcher de suivre sa pesanteur est ici proportionnelle à la hauteur du plan incliné, hauteur qui est très-petite.

On pourrait croire qu'il y a toujours de l'avantage à diminuer cette hauteur, et cet avantage a lieu en effet pour la puissance; mais il faut observer que dans ce cas la pression supportée par le plan incliné augmente toujours; ce qui oblige d'en aug-

---

cette tension peut être regardée aussi comme l'effet de la pesanteur du cordon $\overline{AC}$; ainsi donc la pesanteur du cordon $\overline{AC}$ ne lui donne qu'une tension proportionnelle à la hauteur $\overline{BC}$, d'où il suit, que l'action que la pesanteur exerce dans le sens d'un plan incliné est proportionnelle (la longueur de ce plan étant la même) à la hauteur du plan incliné : ce qui est le principe que nous avons développé précédemment : ceux de nos lecteurs qui voudront s'occuper des applications du principe que nous avons établi dans la 3e. leçon, en trouveront une au sujet du plan incliné dans la note qui suit cette 4e.

menter la résistance et par conséquent les dimensions. Or, cela ne se peut faire quelquefois sans un grand accroissement de dépense, ce qui rend impraticable l'emploi d'un moyen dont le principal avantage est l'économie; dans ce cas il faut combiner les deux choses de manière à obtenir un terme moyen qui réunisse autant que possible les deux qualités.

C'est par un pareil procédé qu'on lance les bâtimens à la mer. Ces énormes masses ne pouvant se transporter que par des efforts immenses, on a imaginé de se servir de leur propre pesanteur pour leur donner du mouvement en les posant sur un plan incliné, sur lequel on les maintient aisément au moyen d'un appareil solide de charpente et de cordage. Lorsque le navire est terminé, on défait tout cet appareil, et le vaisseau par sa pesanteur glisse sur le plan incliné qu'on a eu la précaution d'enduire de substances onctueuses pour aider la vitesse. Vous voyez qu'ici il faut encore combiner deux conditions; celle de soutenir le vaisseau avec l'appareil le moins dispendieux possible, ce qui exige d'incliner peu le plan, et celle de donner une vitesse suffisante au vaisseau, ce qui demande d'augmenter la hauteur du plan incliné : cette dernière condition doit, jusqu'à un certain point, l'emporter, car les conséquences de l'arrêt du bâtiment sont importantes pour sa solidité, et pourraient en compromettre l'existence, ce qui doit être considéré avant tout le reste. 16

5. Une des applications les plus fréquentes du plan incliné, ce sont les rampes ou routes en pente, au moyen desquelles on fait franchir de hautes montagnes à des charriots pesamment chargés : ici la force nécessaire pour obtenir cet effet est proportionnelle au poids du charriot, multiplié par le rapport entre la hauteur du plan incliné et sa longueur. Vous voyez donc qu'il y a un grand avantage à diminuer en hauteur. On pourrait à la rigueur employer un plus grand nombre de chevaux, mais alors, outre le danger, il y aurait une augmentation de dépense qui deviendrait inutile dans les routes plates. C'est ce que vous pouvez voir tous les jours dans quelques passages de cette ville, où l'on est obligé d'employer des chevaux de relais. Cette considération jointe à la précédente, a fait admettre un maximum d'inclinaison qu'on ne dépasse que le moins possible.

Quelquefois l'espace en longueur manque ; alors on fait faire au chemin une ou plusieurs révolutions sur lui-même en déterminant sa pente, de manière à ne pas dépasser la limite dont nous venons de parler. Telles sont les rampes douces circulaires dont l'escalier à vis d'un clocher peut vous donner une idée et qui n'en diffèrent que par l'absence des marches et des dimensions plus considérables.

6. L'équilibre des terres et celui des voûtes, présentent encore des applications de la théorie du plan incliné ; mais ces appplications faisant le

sujet d'une leçon particulière, nous n'en parlerons point ici. Nous nous arrêterons seulement sur le parti que Coulomb a tiré du plan incliné pour évaluer la résistance du frottement.

7. Lorsqu'on veut faire glisser un corps pesant sur un plan horizontal, on éprouve toujours une résistance plus ou moins considérable, suivant le poids du corps et la nature des surfaces de contact. Cette résistance se nomme frottement, et se reproduit toutes les fois qu'on veut faire glisser deux surfaces l'une sur l'autre.

Le frottement est une des causes les plus puissantes de la déperdition des forces motrices dans les machines : son influence est quelquefois étonnante : aussi doit-on employer tous les moyens possibles pour en diminuer l'effet. D'un autre côté, dans les machines destinées à obtenir l'équilibre, il agit souvent d'une manière avantageuse : nous en verrons l'exemple dans les cabestans, et dans quelques manœuvres de la marine ; c'est encore au frottement que se doit la faculté que nous possédons de marcher sur des plans plus ou moins inclinés, sans glisser et tomber à chaque mouvement : ce qui nous arrive sur la glace bien unie peut vous donner une idée de ce qui se passerait sans l'existence de cette résistance passive : nous ne pourrions non plus tenir à la main aucun instrument, si les surfaces de contact n'éprouvaient de la résistance à glisser les unes sur les autres ; la plupart des

assemblages de charpente et autres ne se maintiennent qu'en vertu du frottement des pièces qui les composent.

8. Voici comment Coulomb est parvenu à déterminer pour de certains corps la résistance due au frottement.

Imaginez un plan matériel mobile $\overline{AC}$ (fig. 5) tournant autour d'un axe horizontal A et pouvant prendre autour de cet axe une infinité de positions. Admettez que la ligne $\overline{AD}$ représente le plan horizontal et qu'au bout de ce plan se trouve un cercle métallique vertical ayant son centre sur la droite A et divisé en degrés : au moyen de ce cercle, on pourra mesurer l'angle formé par le plan avec l'horizon, ce qui suffit pour trouver le rapport entre la hauteur $\overline{BC}$ et la base $\overline{AB}$ du plan incliné : (*) nommons ce rapport f.

Cela posé, concevez deux plaques de bois ou de métal, de même espèce ou d'espèces différentes, polies ou non, placées l'une sur l'autre de manière que la surface de contact soit parallèle au plan incliné, et d'une autre part imaginons que la plaque $a'\ b'$ soit fixée à demeure sur ce plan, tandis que l'autre ne soit simplement que posée sur cette première.

Si vous placez le plan variable dans une situa-

(*) Ce rapport f est égal à tang α, α étant l'angle BAC.

tion horizontale; il est clair que tout cet appareil sera en équilibre : mais si vous élevez ce plan, alors la force produite par le poids de la plaque *ab* tendra à la faire glisser sur la plaque *a' b'*; tandis que le frottement de ces deux plaques s'opposera de son côté à ce mouvement pendant quelque tems, ces deux puissances resteront en équilibre, mais enfin il viendra une inclinaison du plan où le mouvement commencera à avoir lieu, et il est visible que dans cette position la résistance due au frottement est très à peu près égale à la force Q qui ferait équilibre au poids P de la plaque supérieure.

Ainsi F étant ce frottement, on a, d'après ce que nous venons de voir,

$$F : P :: H : L$$

d'une autre côté si on veut connaître la pression normale R exercée sur le plan de contact des surfaces, on trouvera par la même conséquence la proportion

$$P : R :: L : B$$

d'où l'on tire en multipliant terme à terme cette proportion par l'autre

$$F : R :: H : B$$

et enfin

$$F = R \times \frac{H}{B} = R \times f.$$

C'est-à-dire que lorsque deux corps pressent l'un sur l'autre, le rapport entre la pression et le frotte-

ment produit par cette pression est égal au rapport entre la base et la hauteur du plan incliné, parallélement auquel il faut placer la surface de contact pour que la pression décomposée parallélement à la pesanteur fût prête à l'emporter sur la résistance due au frottement.

9. Vous voyez que de cette manière on pourrait, en donnant au corps supérieur une surface de contact et une pesanteur arbitraire, déterminer le frottement résultant pour tous les cas particuliers possibles. Mais non seulement cette méthode est utile dans ce sens, c'est qu'elle a encore produit des résultats généraux très-remarquables et qu'il importe de vous faire connaître.

I. Quelque soit la nature des surfaces en contact et la pesanteur de celle qui tend à glisser, on a vu que dans le cas où la nature des surfaces ne change pas, l'angle α et par suite le rapport f ne change pas non plus : donc *le rapport de la pression au frottement est (toutes choses égales d'ailleurs) constant pour des surfaces de même nature.*

II. Cette valeur f ne change pas non plus, quand la nature des surfaces de contact restant la même, on augmente ou l'on diminue l'étendue des surfaces; donc : *le rapport du frottement à la pression ne dépend que de la nature des surfaces de contact;* résultat de la plus haute importance, puisqu'il conduit à n'avoir plus besoin de déterminer ce rapport qu'une seule fois pour pouvoir l'employer dans

toutes les circonstances possibles où se retrouveront des surfaces de même nature.

10. Coulomb ne se borna pas à ces résultats généraux, il importait de faire entrer dans l'évaluation du frottement des élémens qui peuvent en modifier beaucoup l'intensité.

Il fallait donc tenir compte :

1°. De l'influence des enduits qui changent la manière d'être réciproque des surfaces.

2°. Du tems pendant lequel les surfaces ont été en contact avant de prendre du mouvement.

3°. De l'influence de la vitesse sur le frottement.

Voici les conséquences des recherches de Coulomb à ces importantes conditions :

Le frottement des bois glissant à sec sur les bois, oppose, après un temps suffisant de repos, une résistance proportionnelle aux pressions : cette résistance augmente sensiblement dans les premiers instants de repos : mais, après quelques minutes, elle parvient ordinairement à son *maximum* ou à sa limite.

Lorsque les bois glissent à sec sur les bois avec une vitesse quelconque, le frottement est encore proportionnel aux pressions ; mais son intensité est beaucoup moindre que celle que l'on éprouve en détachant les surfaces après quelques minutes de repos ; l'on trouve, par exemple, que la force nécessaire pour détacher et faire glisser deux surfaces de chêne après quelques minutes de repos, est à

celle nécessaire pour vaincre le frottement, lorsque les surfaces ont déjà un degré de vitesse quelconque, comme 9,5 à 2,2.

Le frottement des métaux glissant sur les métaux sans enduit est également proportionnel aux pressions ; mais son intensité est la même, soit qu'on veuille détacher les surfaces après certain tems de repos, soit qu'on veuille entretenir une vitesse uniforme quelconque.

Les surfaces hétérogènes, telles que les bois et les métaux, glissant l'une sur l'autre sans enduit, donnent pour leur frottement des résultats très-différents de ceux qui précèdent; car l'intensité de leur frottement, relativement au tems de repos, croît lentement, et ne parvient à la limite qu'après quatre ou cinq jours et quelquefois davantage, au lieu que, dans les métaux, elle y parvient dans un instant et, dans les bois, dans quelques minutes. Cet accroissement est même si lent, que la résistance du frottement dans les vitesses insensibles est presque la même que celle que l'on surmonte en ébranlant ou détachant les surfaces, après trois ou quatre secondes de repos. Ce n'est pas encore tout : dans les bois glissant sans enduit sur les bois, et dans les métaux glissant sur les métaux, la vitesse n'influe que très-peu sur les frottemens ; mais ici le frottement croît très-sensiblement, à mesure que l'on augmente les vitesses : en sorte que le frottement croît à peu près suivant une progression arithmé-

tique, lorsque les vitesses croissent suivant une progression géométrique.

11. Ces résultats cependant, quoique bien remarquables, seraient encore sans une grande utilité pour vous, si vous ne connaissiez pas les détails qui en font comme le complément indispensable : je vais donc en présenter ici quelques-uns des plus importans relativement au frottement des métaux sur les métaux et les bois, et des bois sur les bois : ce que je vais vous faire connaître est encore dû à l'homme illustre que je vous ai déjà cité dans le cours de cette leçon.

12. Lorsqu'on laisse en contact des surfaces métalliques, le frottement acquiert son maximum dans un tems très-court : on trouve alors pour le rapport du frottement à la pression, les valeurs suivantes :

Fer contre fer	0,277.
Fer contre cuivre jaune	0,263.
Fer contre cuivre rouge	0,233.
Fer contre cuivre en réduisant les dimensions des surfaces à leur plus petite limite.	0,166.

Lorsque l'on doit donner un mouvement continu à ces surfaces, ces rapports ne changent point ; seulement leur grandeur diffère d'une manière notable au fur-à-mesure que le frottement augmente le poli des surfaces de contact.

Lorsque des surfaces métalliques glissent l'une sur l'autre avec des enduits interposés, il est clair

que la nature de l'enduit, en changeant celle de la surface, doit changer l'intensité du frottement. En faisant varier la nature de l'enduit, on obtient des frottemens sensiblement différens sous les mêmes pressions. Coulomb trouve que le meilleur enduit est le suif nouveau et frais : il pense que c'est à raison de sa dureté. A mesure que le frottement agit sur cet enduit, il en diminue l'efficacité; le même résultat s'observe en mêlant des substances onctueuses au suif. Coulomb a trouvé les rapports suivans du frottement à la pression pour une vitesse peu considérable.

Avec du suif nouveau :

Fer contre fer. . . . . 0,100.

Fer contre cuivre. . . . . 0,090.

Avec du suif déjà ramolli par le frottement :

Fer contre cuivre . . . . 0,112.

Pour les mêmes surfaces avec un enduit onctueux . . . . 0,115.

Et avec une couche d'huile sur le suif. 0,132.

Il est bon d'observer que les enduits changent aussi les durées du tems nécessaire pour que des surfaces appliquées l'une sur l'autre et en repos atteignent le maximum de frottement. Dans le frottement du fer et du cuivre enduits de suif, l'accroissement de frottement se fait rapidement et n'est pas très-fort ; l'étendue des surfaces n'y influe que d'une manière insensible et on retrouve entre le frottement et la pression, le rapport 0,09 que

nous avons déjà mentionné. La même chose a lieu pour les autres enduits, du moins quand au tems nécessaire pour obtenir le maximum de pression avec l'huile et le vieux oing, il varie entre le $\frac{1}{5}$ et le $\frac{1}{8}$ de la pression.

Il y a encore une chose importante à observer: c'est que pour les grandes surfaces le frottement augmente avec la vitesse tandis que le contraire a lieu pour les petites surfaces. Il serait intéressant de déterminer la limite qui sépare ces deux résultats.

13. Le frottement du bois contre des surfaces métalliques offre des résultats bien différens de ceux que nous venons d'exposer. On trouve pour le rapport du frottement à la pression avec un enduit de suif :

Pour le fer sur le chêne	0,029.
Pour le cuivre sur le chêne	0,021.
Et avec un enduit onctueux pour le fer sur le chêne	0,071.

Vous voyez ici combien l'enduit est influant sur le rapport du frottement à la pression. C'est aussi, à ce qu'il paraît, dans le frottement des surfaces ligneuses que l'enduit est le plus important par ses effets.

Il n'est pas nécessaire de vous dire ici que les enduits de la nature de l'huile sont les moins avantageux pour les bois, à moins que de les y faire bouillir.

Lorsque les surfaces sont toutes les deux ligneuses, il y a encore à observer un élément qui peut beaucoup modifier le frottement, c'est la direction des fils du bois. Vous sentez en effet, que cette quantité de résistance changera selon que les bois frotteront à fils croisés ou autrement. Une observation générale c'est quand les surfaces sont bien polies et dressées, le frottement atteint son maximum très-rapidement dans ces surfaces. Au reste, on trouve pour ces surfaces des frottemens très-variables et qui dépendent surtout de la nature des enduits. En voici quelques-uns :

Chêne sur chêne	sans enduit	0,418.
Chêne sur sapin	id.	0,667.
Sapin sur sapin	id.	0,562.
Orme sur orme	id.	0,458.

Lorsque les fils du bois se recroisent le frottement augmente de près de la moitié. Il diminue considérablement au contraire par les enduits, surtout lorsque les surfaces ont une certaine vitesse; on trouve ainsi pour le rapport du frottement à la pression du chêne contre chêne. . . 0,038.

Pour le sapin sur le sapin . . . . . 0,167.

Pour l'orme contre l'orme . . . . 0,100.

14. Coulomb a encore examiné les frottemens produits par les surfaces d'axes tournant dans des boîtes. (*)

(*) On me pardonnera d'avoir souvent cité dans cette leçon le texte même de Coulomb.

Il a trouvé que, lorsque des axes de fer frottent dans des boîtes de cuivre sans enduits, la vitesse n'influe que d'une manière insensible; le rapport de la pression au frottement est comme 6 à 1. S'ils sont enduits de suif bien pur, sans mélange et sans fibres, qui est de tous les enduits celui qui réussit le mieux pour adoucir le frottement des machines, le rapport de la pression au frottement est comme 11 à 1. Dans le mouvement des axes on a trouvé en général le frottement moindre que dans celui des plans : il semble en effet que, dans les mouvemens de rotation, les parties en contact peuvent se désengrener bien plus facilement que lorsque les surfaces glissent l'une sur l'autre. Voici encore une remarque qui distingue ces deux espèces de frottement : lorsqu'on fait passer plusieurs fois des lames de cuivre sur des lames de fer sans renouveler l'enduit, le suif s'use et le frottement augmente; l'on éprouve cet effet beaucoup moins sensiblement dans le frottement des axes. Quand la vitesse est considérable, le frottement diminue un peu, à mesure que la vitesse augmente; mais, comme la presque totalité des machines de rotation employées pour faire mouvoir des fardeaux sont manœuvrées à bras d'hommes, et n'élèvent les fardeaux qu'avec de petites vitesses, la diminution de frottement due à l'augmentation de vitesse ne doit presque jamais influer dans la pratique; d'ailleurs, cette diminution de frottement, en

augmentant les vitesses, n'a lieu qu'avec des enduits mous, tels que le vieux oing et l'huile. Le rapport de la pression au frottement des axes de fer sur chapes de cuivre, avec enduit de vieux oing, est comme 8 à 1; des axes de fer sur chapes de cuivre enduites d'huile d'olive, ou seulement onctueuses, telles à peu près qu'elles se trouvent dans l'usage des machines qui n'ont pas été enduites depuis long-tems, le rapport est comme 8 à 1 ou même un peu plus petit, mais jamais au-dessous de . . . . 7½ à 1

Axe de chêne vert, boîte de gaïac,
enduit de suif . . . . 26 à 1
à surfaces onctueuses . . . . 17 à 1

Axe de chêne vert, boîte d'orme,
enduit de suif . . . . 33 à 1
(C'est celui dont le frottement est moindre.)
à surfaces onctueuses . . . . 20 à 1

Axe de buis, boîte de gaïac. . . . . 23 à 1
à surfaces onctueuses . . . . 14 à 1

Axe de buis, boîte d'orme, enduit
de suif . . . . 29 à 1
à surfaces onctueuses . . . . 20 à 1

Axe de fer, boîte de buis, enduit de
suif. 20 à 1

On a observé que le rapport de la pression au frottement des axes de chêne vert, dans les boîtes de gaïac, pour des poulies qui ont travaillé pendant long-tems, n'est plus de 17 à 1, mais se trouve entre 16 et 13 à 1.

15. Vous voyez que les expériences de Coulomb et son ingénieuse théorie embrassent tout ce qui est relatif à cette partie importante de la mécanique, qui traite des pertes de forces produites par le frottement; en sorte qu'au moyen de ce que je viens de vous dire. vous pourez apprécier sans beaucoup d'erreur les effets que peut produire cette cause sur les machines d'équilibre : pour vous faire une idée bien précise, au reste, de la manière dont le frottement influe sur l'équilibre, nous aurons maintenant soin de faire entrer dans chaque exemple d'équilibre que nous traiterons, la condition du frottement, et vous verrez alors comment les lois ordinaires de l'équilibre sont modifiées par cette condition. De cette manière nos résultats s'approcheront beaucoup plus de la vérité et vous offriront toujours des conséquences plus applicables et par conséquent plus utiles.

16. Vous remarquerez que de tous les frottemens le moindre est celui du cuivre et ensuite du fer sur le chêne enduit. Cette considération indiquerait déjà que les boîtes ou les coussinets en bois de chêne seraient préférables aux autres pour recevoir les pivots ou tourillons en cuivre ou en fer : on a fait des expériences pour utiliser cette observation, et ces expériences ont donné des résultats satisfaisans. « J'ai entrepris, dit Borgnis, des expériences rela-
« tives à cet objet important, et je puis assurer mes
« lecteurs que j'ai trouvé sous le point de vue de

« la solidité et de la durée, comme sous celui de la « diminution du frottement, les supports de bois « dur préférables à ceux de cuivre; dans plusieurs « grandes machines dont les axes supportaient des « pressions considérables, j'ai fait substituer aux « anciens supports en cuivre de nouveaux supports « en chêne vert qu'on avait laissé séjourner dans « l'huile bouillante; j'ai reconnu, après un travail « continuel de deux à trois mois, qu'ils n'avaient « pas éprouvé d'altération bien sensible, et qu'ils « étaient moins sujets à se dégrader et à s'user « que les autres. »

Indépendamment de cette importante remarque vous pouvez déjà voir, comme conséquence de tout ce que nous venons de dire, pourquoi dans les engrénages, et dans beaucoup de machines où il se trouve des surfaces en contact, on a soin de faire ces surfaces de matières différentes. C'est uniquement pour diminuer le frottement : ainsi dans les horloges vous voyez habituellement les pignons en acier et les roues en cuivre : dans quelques machines soignées, les dents d'une roue sont en bois, tandis que celle qui engrène avec elle a ses dents en métal; toutes ces pratiques qui d'abord sont venues à la suite de l'expérience, trouvent maintenant dans la théorie non seulement l'explication, mais la mesure même de leurs effets.

Au reste, si le frottement est une cause dont on doit autant que possible éviter les effets dans la

plupart des machines motrices, à cause de leur pernicieuse influence, il en est d'autres où il rend les plus grands services, et dans une foule de cas, il fournit les moyens d'obtenir des résultats que d'autres forces actives ne donneraient pas. C'est sur le frottement que sont fondés les appareils qui servent à enrayer les roues des voitures, afin d'opposer un obstacle à leur mouvement trop rapide sur des plans inclinés et les préserver ainsi d'une accumulation de mouvement qui amenerait les plus graves accidens : dans les laminoirs et les refendoirs, le frottement produit par la pression des cylindres sur la surface des barres ou des toles, suffit pour vaincre l'énorme puissance d'adhérence des molécules métalliques et forme ainsi une force longitudinale qui augmente dans le sens de la longueur les dimensions des pièces métalliques au détriment de leur épaisseur : on voit encore des applications ingénieuses du frottement dans les *freins* ou machines qui arrêtent tout-à-coup et sans secousse le mouvement des roues hydrauliques et des moulins à vent : on a aussi voulu faire servir le frottement à régulariser l'effet des machines motrices, et dans quelques cas ce moyen peut être employé avec avantage. Les terres en talus ne se maintiennent aussi que par le frottement : nous verrons plus tard comment on peut partir de ce point de vue pour déterminer leur poussée contre un plan vertical.

On se sert quelquefois du frottement pour lier ensemble d'une manière solide et sans soudure des métaux différens : si vous imaginez qu'on ait taillé avec précision un cylindre ou un cône d'acier, et qu'on lui ait préparé une boîte en cuivre qui le loge exactement, vous pourrez assembler ces deux pièces d'une manière fort simple. Il suffira de faire chauffer le cylindre et sa boîte et de les faire ensuite passer brusquement à une température plus basse ; l'acier se trempe alors et augmente de volume, tandis que le cuivre demeure à-peu-près dans les mêmes dimensions : il s'opère ainsi une pression sur les parois de contact, et le frottement qui en résulte devient capable de résister à des forces énormes qui tendraient à séparer les deux pièces.

On remarque un effet à peu près semblable dans les portes ou les fenêtres à coulisse : le changement de température en augmentant leurs dimensions les presse contre les coulisses qui leur servent de guides et produisent quelquefois un frottement qui en rend le mouvement impossible. C'est une chose qu'il faut éviter avec attention quand on construit de pareilles pièces; il faut laisser de l'espace libre pour la dilatation du bois ; c'est ce qu'on appelle donner du jeu : cette précaution est encore plus indispensable dans les charpentes qui passent souvent de l'air à l'eau et réciproquement, comme les écluses à coulisses : nous avons vu plusieurs exemples d'ouvrage de cette espèce, qui, faute de

cette précaution, sont devenus inutiles et qu'il a fallu reconstruire en entier. La même chose peut se dire des charpentes ouvrantes et fermantes de toute espèce, comme les portes et les fenêtres à gons, les ponts tournans. Dans tous ces cas, on peut éviter l'action du frottement sans laisser de jeu aux pièces, ce qui ne serait pas toujours convenable, et le moyen est fort simple. Il consiste à disposer les faces de joints *ab*, *cd* de manière (fig. 8) à ce qu'elles fassent toutes un angle obtus avec les rayons *ao*, *co*, qui vont de ces faces à l'axe de rotation *o*, ou à la ligne verticale qui passe par les gonds. Alors vous voyez qu'il n'y a, dans le cas le plus défavorable, qu'à vaincre le frottement exercé dans une seule position des ouvrans, et qu'aussitôt tous ces plans de joints se séparent, en d'autres termes se *desserrent* et ne produisent plus de frottement, puisqu'ils cessent d'être en contact. Cette précaution fort simple est connue de tous les bons ouvriers, qui l'employent avec diverses modifications.

Le frottement est la cause à laquelle on doit la possibilité de former, avec des filamens plus ou moins longs, des fils ou des cordes d'une grandeur considérable; nous prendrons le coton pour exemple. Les brins ou, comme on les appelle en terme de fileur, les *soies* du coton, sont des fils très-minces d'une longueur d'environ 14 ou 15 lignes de France (34 à 36 millimètres). On aboute ces fils de manière à se succéder en nombre à peu près égal et d'autant

plus grand qu'on veut faire le fil plus gros, et de façon que chaque soie se trouve en contact avec plusieurs autres; à peu près comme on le voit dans la figure 9. Ces fils ainsi placés glisseraient les uns sur les autres; mais on tord le faisceau qu'ils forment, et par cette opération les fils se rapprochent, se pressent l'un contre l'autre et delà résulte un frottement en vertu duquel ils restent attachés ensemble, comme ils le seraient autrement par de la colle, ou par des nœuds. Voilà l'origine de l'emploi de la torsion : c'est le même principe qui fait tordre les fils de lin, les cordes, les câbles, etc. Vous voyez vous-mêmes que la torsion est assez forte, quand elle a produit un frottement équivalent à la résistance de la *soie* : ainsi vous pouvez vérifier si un fil est assez tordu, en le cassant; car alors aucune soie ne devra pouvoir glisser, et la cassure devra être nette : mais s'il est facile de juger si le fil est assez tordu, il ne l'est pas autant de s'assurer s'il ne l'est pas trop. On ne peut le faire que par des expériences délicates et qu'il m'est difficile de décrire ici. Je vous ferai connaître plus tard les procédés dont je me suis servi pour déterminer approximativement le degré de torsion nécessaire aux divers fils de coton et de lin, ainsi qu'aux cordes et aux câbles; nous verrons en même tems qu'en général la torsion donnée à ces derniers est trop forte et je tâcherai de vous en montrer les inconvéniens.

NOTES.

17. *Sur la condition d'équilibre tirée de la position du centre de gravité d'un système pesant.* (p. 120.)

Pour bien entendre ce que nous avons avancé à ce sujet, il faut considérer un système ou, si l'on veut, une machine, dans laquelle on ne puisse mettre en mouvement l'une des parties sans faire aussi mouvoir toutes les autres. Telle est, par exemple, une machine à vapeur dont le piston, destiné à recevoir l'action de la vapeur, ne peut se mouvoir sans faire changer la position de la bièle, du balancier, du volant, etc.

Dans un tel système, pour chaque nouvelle position des pièces il y a une nouvelle position du centre de gravité, et la liaison entre ces diverses choses est telle qu'il est facile de concevoir que si on donnait un mouvement à ce point fictif, on communiquerait par cela même un mouvement obligé à toutes les pièces du système.

Et cela ne sera point changé si, au lieu des forces qui agissent sur ce système, on suppose des poids; seulement dans ce cas les poids devront être considérés comme pièces intégrantes de la machine.

Puisque dans les deux cas le mouvement du centre de gravité entraîne celui des diverses pièces du système et réciproquement, il est visible qu'on pourra faire abstraction de la pesanteur de ces diverses pièces et ne plus considérer qu'une force égale à la somme de leurs poids, et agissant sur

le centre de gravité. Alors on pourra facilement voir que cette force tend uniquement à faire mouvoir le centre de gravité, et que c'est dans le mouvement que prendra ce centre, qu'il faudra chercher ceux que pourrait prendre le système entier ou la machine.

Mais le mouvement de ce point ne pourra en général se faire que sur une surface ou sur une ligne, et il est visible que si, dans une position donnée du système, la pesanteur du centre de gravité est normale à cette surface ou à cette ligne, le système sera en équilibre; car il serait absurde de supposer qu'une force pût donner du mouvement à un point quelconque perpendiculairement à sa direction sans lui en donner dans le sens de cette direction. Au contraire si la force de la pesanteur est oblique à cette surface ou à cette ligne, le mouvement aura lieu infailliblement et l'équilibre sera détruit.

Il résulte évidemment de là les théorêmes suivans :

I. *Si dans un système soumis à l'action de la pesanteur, le centre de gravité ne peut se mouvoir que suivant un plan ou une droite, l'équilibre aura lieu dans toutes les positions du système, lorsque ce plan ou cette droite seront parallèles à l'horizon, et n'aura jamais lieu dans le cas contraire.*

II. *Si, au lieu de parcourir un plan ou une droite, le centre de gravité est assujetti à se mou-*

voir sur une ligne ou sur surface courbe, l'équilibre aura lieu dans toutes les positions du système pour lesquelles le centre de gravité sera dans les points les plus élevés ou les plus bas de la courbe.

Seulement dans les premiers cas le plus léger déplacement du système détruira l'équilibre, tandis que dans le second un petit déplacement ramenera le système à l'état d'équilibre après des oscillations plus ou moins longues.

L'un de ces états (le dernier) s'appelle *équilibre stable*, l'autre est connu sous le nom *d'équilibre non stable.*

Il est cependant bon d'observer que l'équilibre stable n'existe qu'en vertu des frottemens et des résistances de diverses espèces qui contribuent à détruire le mouvement ; car en théorie on démontre que sans ces cause, il ne résulterait d'un dérangement très-petit du système qu'une suite d'oscillation au-delà et en-deçà du point d'équilibre, lesquelles ne cesseraient jamais.

Nous allons, pour éclaircir tout ceci, prendre un exemple tiré de la leçon précédente et tâcher de montrer en même tems l'avantage qu'il y a d'employer le principe que nous venons d'exposer pour le cas du plan incliné.

Supposons que MS et NS soient les sections de deux plans inclinés adossés par un plan vertical. Imaginons que deux corps pesans P et Q soient liés l'un à l'autre par le fil flexible et inextensible

QBAP passant sur une poulie de renvoi et parallèle aux droites SN et SM et que chacun de ces deux corps soit placé sur l'un des plans ; il est visible que l'un ne pourra descendre sans faire monter l'autre, en sorte que le centre de gravité du système formé par ces deux corps changera alors de position : cherchons le chemin décrit par le centre de gravité.

Pour cela prolongeons jusqu'à leur rencontre en C les directions des deux cordons BQ et AP, puis prenons de C en p et de C en q deux droites dont la somme soit égale à la somme des lignes CQ et CP, et qui soient proportionnelles, l'une au poids P du corps P, l'autre au poids Q du corps Q. Nous trouverons facilement la longueur de ces lignes par l'algèbre ; on a K étant une constante indéterminée

$$Cp = K \times P \qquad Cq = K \times Q$$

et
$$\overline{Cp} + \overline{Cq} = \overline{CP} + \overline{CQ}$$

cette dernière équation devient

$$K \times (P + Q) = CP + CQ$$

d'où

$$K = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{P + Q}$$

et
$$\overline{Cp} = \overline{P} \times \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{P + Q} \qquad \overline{Cq} = \overline{Q} \times \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{P + Q}$$

Ces valeurs de Cp et de Cq ont cela de remar-

quable, comme nous l'observons, qu'elles ne dépendent que de la longueur du cordon qui joint les deux corps, et des poids de ces corps; en sorte que ces trois choses restant les mêmes, quelque soit la position des corps P et Q on retrouvera toujours la même position pour les points p et q.

Cela posé, menons la droite $\overline{PQ}$ qui coupe en G la droite pq. Les triangles QGq et PGp nous donnent les relations

$$(1) \qquad \frac{QG}{Qq} = \frac{\sin QqG}{\sin QGq} = \frac{\sin Cqp.}{\sin PGp.}$$

$$(2) \qquad \frac{PG}{Pp} = \frac{\sin GpP}{\sin PGp.} = \frac{\sin Cpq.}{\sin PGp.}$$

Mais puisque la somme des droites CQ et CP est égale à la somme des droites Cq et Cp, on a

$$CQ + CP = Cq + Cp.$$

ou $$CQ - Cq = Cp - CP$$

ou encore $$Qq = Pp.$$

Divisant donc l'équation (1) par l'équation (2) on trouve :

$$\frac{QG}{PG} = \frac{\sin Cqp.}{\sin Cpq} \cdot \frac{\sin PGp}{\sin PGp.}$$

ou $$\frac{QG}{PG} = \frac{\sin Cqp.}{\sin Cpq.}$$

Or,
$$\frac{\sin Cqp.}{\sin Cpq} = \frac{Cp.}{Cq} = \frac{P}{Q}$$

donc
$$\frac{QG.}{PG} = \frac{P}{Q.}$$

D'où il suit, que les segmens QG et PG sont en raison inverse des poids P et Q ; par conséquent le point G est le centre de gravité de ces deux poids. Donc, le centre de gravité des poids P et Q se trouve sur la droite $\overline{pq}$.

Or, nous avons vu que cette droite ne pourrait pas varier, tant que les poids P et Q et la longueur du fil resteraient la même, donc :

Si l'on fait mouvoir les deux corps P et Q, leur centre de gravité descendra ou montera en ligne droite.

Voilà donc un exemple de la manière de déterminer le mouvement du centre de gravité d'un système. Maintenant, voyons comment on peut appliquer à cet exemple les raisonnemens que nous avons faits précédemment.

On voit facilement que le centre de gravité des deux corps se mouvant, il faudra que les deux corps se meuvent. Or, ce mouvement du centre de gravité arrivera infailliblement, quelque soit le poids du système, si l'on suppose la droite pq inclinée à l'horizon. Pour qu'il y ait équilibre, il faut donc que cette droite soit perpendiculaire à la pesanteur. Voyons la conséquence de cela.

D'abord on aura toujours (fig. 7) :

$$\frac{Cp.}{Cq} = \frac{P}{Q}$$

Mais à cause des triangles semblables qCp et MSN on a encore :

$$\frac{Cp}{Cq} = \frac{MS}{NS}$$

donc :

$$\frac{P}{Q} = \frac{MS}{NS}.$$

C'est-à-dire que, pour qu'il y ait équilibre entre les poids P et Q, il faut qu'ils soient proportionnels, chacun à la longueur de la portion du plan incliné sur lequel il se trouve comprise entre l'arête commune aux deux plans et un plan horizontal donné.

Si l'on suppose un des plans inclinés verticaux, alors on retrouve le théorême déjà connu : car dans ce cas, la longueur du plan vertical devient la hauteur de l'autre plan et le poids du corps qui glisse le long de ce plan est la véritable expression de la force tangentielle destinée à soutenir l'autre corps.

On trouve donc, comme nous le savons déjà, que la force nécessaire pour retenir sur un plan incliné un corps pesant en le tirant parallèlement au plan, doit être égale au poids de ce corps, multiplié par le rapport de la hauteur du plan incliné à sa longueur.

Je ne puis que conseiller à ceux qui s'occupent

de mécanique de faire souvent des applications de la méthode que je viens d'employer aux différentes questions de statique qui pourront se présenter : indépendamment de la facilité qui en résulte pour tous les cas, il en est plusieurs qui demanderaient, pour être démontrés par une autre méthode, des élémens de calcul auxquels il est bon de recourir le moins possible. Ceci a d'ailleurs l'avantage de la clarté, et se lie à un autre principe très-important que nous connaîtrons plus tard.

18. *Sur l'équilibre d'un corps placé sur un plan ou bien sur une surface et sollicité par des forces quelconques, mais en ayant égard au frottement.*

Nous avons vu que pour qu'un corps fût en équilibre sur une surface en vertu de l'action d'un certain nombre de forces quelconques, il fallait que toutes ces forces fussent susceptibles d'une résultante unique normale à la surface et passant par le point de contact du corps et de la surface. En suivant exactement la marche que nous avons employée pour arriver à ce résultat, on trouvera aisément la modification qu'on doit y apporter pour le rendre applicable au cas où il y aurait du frottement entre les deux surfaces.

Soit d'abord f le rapport entre la pression et le frottement pour ces deux surfaces et soient P, P′, P″, P‴.... les différentes forces qui agissent sur le

système, on pourra, comme nous le savons, remplacer toutes ces forces par un groupe de forces parallèles au plan tangent aux deux surfaces et par un second groupe de forces passant par ce point de contact et susceptibles d'avoir une résultante unique R. Le premier groupe ne produira évidemment pas de frottement, puisqu'il ne produit pas de pression : pour estimer celui produit par la force R, soit A l'angle formé par la direction de R et la normale aux deux surfaces au point de contact; la force R se décomposera en deux autres, l'une dirigée suivant la normale et égale à R. Cos A, l'autre située dans le plan tangent et égale à R. sin A. Celle-ci ne produit pas de frottement, mais l'autre en produit un égal à

$$f. \text{ R. Cos A}$$

Tant que ce frottement sera plus grand que la force R. sin A, la force R aura tout son effet détruit, puisque sa composante normale au point de contact R. Cos A sera détruite par la résistance de la surface de contact et que sa composante parallèle à cette surface sera plus faible que le frottement : il ne restera donc plus que le groupe de forces parallèles au plan tangent au point de contact, et en raisonnant exactement comme nous l'avons fait (pages 114 et 115) on verra que ce groupe doit être en équilibre de lui-même : ce qui veut dire que le système entier doit se réduire à la force unique R. Seulement au lieu d'être nécessairement normale à la surface, il

suffit qu'elle fasse avec cette normale un angle A tel que l'on ait

$$f. \text{R. Cos A} > \text{R. sin A}$$

ou $$f. > \text{tang A}$$

ce qui veut dire en d'autres termes :

Un corps sollicité par des forces qui le pressent contre une surface immobile, sera en équilibre quand ces forces se réduiront à une force unique, passant par le point d'appui du corps et formant dans cet endroit avec la normale à cette surface un angle tel que sa tangente trigonométrique soit moindre que le rapport du frottement à la pression pour les deux surfaces qu'on considère.

Ce qui résulte delà, c'est que quand on introduit la condition du frottement, au lieu d'une seule position d'équilibre entre plusieurs forces il y en a une infinité; on voit dans le cas que nous traitons qu'il suffit que la résultante passe dans l'intérieur d'un cône droit ayant pour axe la normale dont nous avons parlé et pour angle au centre le double de l'angle dont la tangente est égale à *f*, ce qui, indépendamment de son utilité, est en soi-même un intéressant théorème. Il est si facile de démontrer que si la résultante tombe hors de ce cône, l'équilibre serait détruit, que je ne crois pas devoir m'y arrêter.

19. *De l'adhérence.*

Comme on pourrait s'étonner de ce que nous n'avons pas parlé de l'adhérence dans le cours de cette leçon, nous dirons ici quelques mots de cette force dont les effets se compliquent ordinairement avec ceux du frottement, et les modifient quelquefois d'une manière remarquable.

Nous avons parlé de la force qui attire les unes vers les autres les molécules de la matière, et nous avons vu que cette force agissait en raison inverse du carré de la distance; bien que cette loi fasse assez rapidement décroître l'action de l'abstration, cependant elle reste encore sensible dans certains cas à des distances fixes, surtout lorsqu'on peut mettre en présence un grand nombre de molécules C'est là l'origine du phénomène de l'adhérence et de beaucoup d'autres qui peuvent se rapporter à lui, comme, par exemple, l'affinité capillaire à laquelle on doit l'absorption de l'eau par le sucre et les éponges.

On rend le phénomène de l'adhérence sensible en plaçant l'une sur l'autre deux surfaces planes ou sphériques, mais qui se touchent dans le plus grand nombre de points possible : on les laisse quelque tems en contact en les pressant l'une contre l'autre et alors si on veut les séparer on éprouve une résistance qui est quelquefois très-considérable et qui augmente avec la durée du contact. Un corps liquide interposé produit une résistance plus forte encore, probablement en augmentant le nombre de points où l'affinité se fait sentir.

Il y a, du reste, quelque chose qui au premier coup-d'œil paraît étrange dans ce phénomène, c'est que le mouvement de séparation dans le sens normal aux surfaces peut être quelquefois très-grand, tandis qu'une très-petite force peut les séparer en les faisant glisser l'une sur l'autre. Cependant cela est très-simple à concevoir.

En effet (fig. 9), considérons les deux surfaces en contact MM''M' et mm''m' et sur l'une de ces deux surfaces les molécules *m*, *m'* et *m''*, dont les deux premières sont situées aux limites de la surface, et la troisième est placée arbitrairement. Il est facile de voir que si l'on veut séparer les deux surfaces en les écartant l'une de l'autre, il faudra vaincre l'attraction des trois

molécules m, m' et m'' pour les positions avoisinantes de la surface apposée : en sorte que la résistance sera proportionnelle au nombre des points de contact, ou pour mieux dire, au nombre des points pour lesquels l'attraction à distance est sensible.

Si au contraire on voulait faire glisser les surfaces l'une sur l'autre, en voit que la molécule m'' étant sollicitée de la même manière à droite et à gauche n'opposera aucune résistance au mouvement. En sorte qu'il n'y aura que les molécules extrêmes m et m' qui pourront entrer pour quelque chose dans la résistance au glissement. Or, il est facile de voir que cette résistance peut être considérée comme à peu près nulle à cause du petit nombre de molécules qui agissent alors.

Cependant il y a une résistance sensible quoique faible, mais elle est due au frottement.

Soit en effet F la force d'adhérence, f le rapport du frottement à la pression pour la surface dont il s'agit, on aura évidemment à vaincre pour les faire glisser l'une sur l'autre la force f. F en outre de la force d'adhérence des molécules placées sur la limite des surfaces en contact. C'est cette force f. F qui forme en grande partie la petite résistance au glissement.

Il est assez remarquable que les deux quantités f et F varient en sens inverse l'une de l'autre. En effet, lorsque le poli des surfaces augmente, f diminue, mais F qui est la cohésion, augmente. La même chose a lieu lorsqu'on enduit les surfaces : en sorte que le produit f. F varie peu. Cependant on sent combien il est important d'avoir égard à ce que nous venons de dire quand on veut évaluer avec précision la quantité f pour des surfaces et des enduits donnés. C'est ce qui m'a engagé à reprendre les expériences de Coulomb sur le frottement pour les surfaces polies : mais mon travail n'étant pas encore terminé, j'ai cru devoir donner ici un extrait de celui de ce savant célèbre ; d'autant plus que l'adhérence entre pour peu de chose dans la plupart des organes mécaniques.

STATIQUE.

CINQUIÈME LEÇON.

Du coin : théorême fondamental sur l'équilibre de trois forces dans l'espace. Application à l'équilibre du coin. Usage du coin : de l'équilibre du coin eu égard au frottement : applications de ce cas.

1. Le coin n'est autre chose qu'un prisme triangulaire ABCDEF, planche VI fig. 1, ayant pour base un triangle isoscèle allongé ABE. On appelle *tête* du coin la face rectangulaire ABCD, correspondant au petit côté AB du triangle isoscèle ; *faces* du coin les deux autres faces rectangulaires du prisme ; *tranchant* du coin l'arrête du prisme opposé à la tête.

Il y a encore quelquefois une autre forme pour le coin (fig. 2) ; il est alors fait en façon de pyramide allongée dont l'une des faces, la plus petite, est un polygone équilatéral, et dont les autres sont des triangles isoscèles ; ce polygone équilatéral est alors la *tête* du coin, et le sommet de la pyramide opposé à ce polygone en est la *pointe*.

Lorsqu'on veut se servir du coin, on en appuye

le tranchant ou la pointe sur le corps dans lequel on veut le faire pénétrer, puis, à l'aide d'une force quelconque, on en presse la tête contre ce corps, alors le coin entre avec plus ou moins de facilité, selon sa forme et la résistance qu'il éprouve. Nous allons déterminer les rapports qui existent entre ces résistances et la pression.

2. Pour cela supposons (fig. 3) que le coin ABC ait pénétré dans un corps solide en vertu d'une action de pression R exercée sur sa tête en AB : il éprouvera en D et E, de la part des surfaces qu'il a écartées, des résistances que nous pouvons supposer, inclinées d'une manière quelconque par rapport aux surfaces de contact. Ainsi on pourra considérer le coin comme un système libre (*) soumis à l'action de trois forces P, Q, R, les deux premières étant

(*) Voyez la 4e. leçon. (Parag. 1 et 2) : puisque les résistances naissent de l'action des surfaces résistantes, on peut concevoir des forces qui détruiraient ces résistances, en sorte qu'au lieu de la surface qui produit la résistance P par exemple, on peut supposer d'abord la surface, puis deux forces égales à son action, l'une P et l'autre —P qui se détruisent, et cela ne change rien à l'état du système. Mais d'autre part l'action de la surface étant équivalente à P, détruit la force — P en sorte que tout est comme s'il n'y avait ni la force — P ni la surface, mais seulement la force P.

Notez du reste que cette abstraction de la surface résistante ne peut se faire qu'en supposant l'équilibre. S'il y avait possibilité de mouvement, il faudrait bien s'en garder.

les résistances latérales, l'autre la pression sur la tête du coin.

Il est d'abord utile d'observer que malgré que nous ayons dit que les pressions P, Q et R pouvaient avoir des directions arbitraires par rapport aux faces et à la tête du coin, ces pressions pouvant être décomposées chacune en deux autres, l'une parallèle et l'autre normale à la face, on ne doit tenir compte que de ces dernières; les autres n'exerceront aucune action sur le coin, puisqu'elles ne tendent qu'à glisser sur les faces : ainsi la question se réduit simplement à chercher l'équilibre entre trois forces normales aux faces du coin. C'est ce dont nous allons nous occuper.

3. Une première condition est évidemment que ces trois forces passent par un même point et soient comprises dans un même plan : vous concevez en effet que l'équilibre ne saurait avoir lieu entre trois forces qui n'ont pas un point de concours et que leur effet serait infailliblement de faire tourner le système dans un sens ou dans l'autre. Au reste c'est ce qu'il est facile de démontrer, et c'est que nous allons faire généralement, vu que nous aurons plusieurs fois besoin de ce principe. En effet si le corps ou le système est en équilibre en vertu de trois forces P, Q, R, il doit l'être encore en rendant deux de ses points fixes, et cela quelques soient ces points. Supposons donc qu'on ait rendu fixes deux des points du système ci-dessus, et comme

nous sommes maîtres de choisir, prenons l'un sur la direction de la force P, l'autre sur celle de la force Q. Alors le corps sera seulement libre de tourner autour de la droite qui passe par les deux points fixes, comme autour d'un pivot.

Or, dans cette hypothèse, les forces P et Q n'entrent pour rien dans l'équilibre puisqu'elles sont naturellement détruites par l'immobilité des points qu'on a rendu fixes sur leur direction. Ainsi il n'y aura plus à considérer que la force R.

Mais celle-ci ne pourra jamais produire l'équilibre à moins de passer par le pivot dont nous avons parlé, car on voit très-bien qu'autrement elle ne pourra produire d'autre effet que de faire tourner le corps autour de ce pivot. Ainsi donc pour que l'équilibre ait lieu, il faut que la direction de la force R passe par toute droite quelconque, menée par deux points arbitrairement choisis, sur les directions des forces P et Q.

Cela posé, prenons sur la direction de la force P un point *a* fixe, et sur celle de Q un point *b* mobile, la droite *ab* sera mobile, et décrira un plan qui contiendra la direction de la force Q toute entière; or d'après ce que nous venons de dire, cette droite devra toujours passer par la direction de la force R, donc la force R doit être toute entière dans le plan décrit par cette droite, donc enfin la force R et la force Q doivent être dans un même plan.

Si maintenant nous concevons des lignes arbitraires tracées dans ce plan, il sera facile de démontrer, comme nous l'avons fait tout à l'heure que ces droites devront toutes passer par la direction de la force P, et qu'ainsi la force P doit se trouver dans le plan engendré par ces diverses lignes; donc la force P doit se trouver aussi tout entière dans le plan des forces R et Q.

Il résulte delà que pour que trois forces soient en équilibre autour d'un système libre, il faut qu'elles soient comprises dans un même plan : c'est ce que nous venons de dire tout à l'heure. Voyons maintenant pour ce qui concerne leur concours.

Supposons qu'on ait rendu fixe un point de la direction de la force R; il est visible que pour qu'il y ait équilibre, il faudra que la résultante des forces P et Q passe par ce point; c'est ce qui se démontre comme nous l'avons fait tout à l'heure : ce point étant quelconque, et la condition restant la même, on voit donc facilement que la résultante des deux forces P et Q, doit passer par tous les points de la force R, ce qui ne se peut, à moins que cette résultante ne se confonde avec la direction de R. Ainsi R doit être opposée directement et égale à la résultante des forces P et Q, ce qui exige entre autres conditions qu'elle passe par le point de concours des deux forces P et Q.

Avant que de passer à l'application de ceci à l'équilibre du coin, permettez-moi de vous faire

observer que la marche que nous venons de suivre peut être employée avec succès pour la démonstration de la plupart des théorêmes de statique : je crois du reste qu'elle n'a dû laisser aucun nuage dans votre conviction. Il est facile en effet de concevoir qu'on ait rendu fixe tel ou tel point d'un système en équilibre sans déranger cet équilibre, et sans changer le rapport des forces qui le produisent. Tel est, par exemple, le cas où un corps serait en équilibre en vertu de la pesanteur et du frottement sur un plan incliné : vous sentez que vous pourriez enfoncer un clou dans le corps et le plan, sans déranger l'équilibre et sans changer les relations entre le poids du corps et le frottement ; tel est encore le cas où vous fixeriez, au moyen d'une fourchette, les bras d'une balance chargée de poids égaux, vous ne changeriez rien aux relations des forces qui avaient mis le système entier en équilibre : tout cela n'offrant pas de difficulté, je reviens à notre théorême principal.

4. Puisque les trois forces P, Q et R sont renfermées dans un même plan, construisons l'intersection de ce plan avec le prisme, nous aurons (fig. 4) un triangle isoscèle ABC, semblable à la base du prisme, et les trois forces P, Q, R, y seront figurées par trois droites OP, OQ, OR, perpendiculaires aux côtés de ce triangle et concourant en un même point O. D'une autre part, les lignes AB, AC et BC seront proportionnelles aux faces respectives du coin.

Or nous verrons plus tard que lorsque trois forces sont perpendiculaires aux côtés d'un triangle, pour qu'elles soient en équilibre il faut que chacune d'elles soit directement proportionnelle à la longueur du côté qui lui est perpendiculaire. Nous aurons donc entre nos trois forces la relation

$$P : Q : R :: AC : BC : AB.$$

C'est-à-dire que chaque force sera représentée par la superficie de la face du coin à laquelle elle est normale; car nous venons de voir que nos lignes AC, BC et AB représentent chacune une de ces superficies.

5. Une première conséquence qui résulte de là, c'est que les forces P et Q sont égales. Ainsi les forces qu'on doit opposer pour empêcher le coin d'obéir à l'impulsion R ou, en d'autres termes, l'action exercée latéralement par les faces d'un coin isoscèle en vertu de la pression exercée sur sa tête, sont égales entre elles.

La seconde c'est que si la force R est représentée par la tête du coin, (*) les autres le sont par les faces, en sorte qu'en rendant le côté AB très-petit, on peut exercer, au moyen d'une petite force, deux actions latérales très-considérables et séparer, par

(*) En d'autres termes, on a, C étant l'angle ACB,

$$P \text{ ou } Q = R \cdot \frac{1}{2 . \sin \frac{1}{2} C}.$$

valeur qui augmente en même tems que l'angle C diminue.

ce moyen, ou couper des corps très-solides et très-durs.

6. S'il avait été question du coin pyramidal, quelque fût le nombre de ses faces triangulaires, on aurait vu que la force appliquée sur sa tête produit des actions latérales qui sont toutes représentées par la superficie des faces où elles se produisent, lorsque la pression exercée sur la tête est représentée par la superficie de la base polygonale qui sert de tête. En sorte qu'à longueur égale, la pression qui chasse cette espèce de coin produit une somme d'actions latérales plus grande. Enfin en augmentant indéfiniment le nombre des côtés du coin pyramidal, il vous sera facile de vous faire une idée de l'action du coin conique.

7. Quelque défectueuse que soit cette théorie, elle représente jusqu'à un certain point, les effets des nombreux instrumens employés par les hommes pour couper ou diviser une foule de corps ou de substances différentes, ou pour produire des effets mécaniques intéressans à connaître.

On peut ranger en effet parmi les coins prismatiques tous les instrumens tranchans, les couteaux, les ciseaux de menuisier, ceux du tailleur de pierre, les lames de rabot, les sabres et une foule d'instrumens tranchans. Vous concevez facilement d'après ce que nous venons de dire, pourquoi l'effet de ces instrumens est d'autant plus énergique que l'angle du tranchant est plus aigu :

c'est qu'alors le rapport de la pression à l'action latérale devient de plus en plus petit, et par conséquent que pour une même pression cette action devient d'autant plus grande.

Il arrive quelquefois qu'on a besoin d'une action coupante fort vive, et que cependant on a besoin aussi de conserver une certaine résistance au coin : alors on employe un moyen dont la forme bi-concave des rasoirs peut vous donner une idée. On termine les faces du coin par deux surfaces cylindriques concaves, (fig 5) qui se coupent le long de l'arête tranchante du coin suivant un angle très-petit : alors la portion du coin près de cette arête agit comme si elle appartenait à un coin très-allongé ACB indiqué par les deux tangentes $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ aux arcs concaves servant de base aux deux surfaces cylindriques.

Cette forme, comme vous le savez, est affectée à un assez grand nombre d'instrumens tranchans : la nature, qui fournit toujours le modèle de tout ce qui peut servir aux hommes, l'a employée dans la construction des feuilles tranchantes de certains roseaux, dans les épines de quelques plantes comme les rosiers, les chardons et les orties. Vous en avez encore un exemple dans les faux qui exigent une grande solidité réunie à un tranchan ttrès-vif.

Au nombre des coins prismatiques se trouvent plusieurs instrumens de culture et de jardinage, les bêches et les houes, les sarcloirs, les ciseaux

à tondre les haies; vous voyez que ces divers instrumens doivent être d'autant plus tranchans que le sol ou les substances dans lesquelles ils doivent pénétrer sont plus tenaces ou plus résistans.

Les coins prismatiques servent encore dans la mécanique à assembler ensemble d'une manière solide différentes pièces qu'on peut avoir besoin ensuite de séparer. Tel est (fig. 6) l'assemblage qui sert à lier au moyen de brides les bièles des machines à vapeur avec la tête du balancier. Ce mode d'articulation, employé dans plusieurs machines, est aussi solide qu'il est simple et commode. Les coins prismatiques dans ce cas prennent le nom de *Clefs*.

La théorie du coin peut servir pour développer celle de l'équilibre des voûtes : et en effet une voûte n'est en général qu'un assemblage de coins prismatiques plus ou moins nombreux qu'on nomme *voussoirs*. Cette considération a conduit un savant distingué, M. de Prony, à des résultats intéressans sur ce cas important d'équilibre ; mais la méthode qu'il a suivie ne peut nous servir ici, et je vous en présenterai plus tard une autre qui conduit à peu près aux mêmes résultats.

Les dents des scies sont encore de véritables coins prismatiques plus ou moins aigus (fig. 7). Ces coins, promenés sur la surface qu'ils veulent entamer, y pénètrent en vertu de la composante de la pesanteur de la scie, normale à cette surface;

puis le mouvement de la translation de la scie abat les portions de ces surfaces qui sont restées intactes entre les coins qui se succèdent. Il ne doit pas vous être difficile de voir que l'inclinaison la plus avantageuse à donner à la scie pendant le travail, est celle où la pesanteur coupe en deux l'angle formé par les faces des dents. La figure 8 vous présente diverses façons de scies dont vous avez déjà sans doute vu l'usage. Ce que je viens de vous dire sur l'inclinaison de la scie vous servira à apprécier les raisons qui ont déterminé la coupe de leurs dents.

On peut considérer aussi comme des coins prismatiques les arêtes tranchantes dont on garnit les biseaux du tranchant d'une faucille. Ils ont pour but d'accélérer la coupe des tiges des graminées, et leur rencontre sur le tranchant de la faucille y forme une espèce de scie qui concourt beaucoup à cet effet.

Les scies ordinaires ayant l'inconvénient d'exiger un mouvement alternatif, on a imaginé de les remplacer par des scies circulaires d'un mouvement continu. Ces scies, qui sont de diverses grandeurs et dont la dentelure varie, produisent les meilleurs effets (fig. 9). Elles sont en général placées de manière à ce que leur axe de rotation soit au-dessous du madrier qui sert de guide au morceau de bois que l'on veut scier et qu'un ouvrier ou une machine conduit dans la direction

convenable. Cet instrument qui se meut sans une grande dépense de force devrait être établi dans tous les ateliers mus par des machines.

Il y a de ces scies dont le diamètre est considérable; alors on en évase une partie, ce qui a le double effet d'en diminuer la masse et d'éviter le jeu que la lame d'acier prend quelquefois par l'action des variations de la température.

Il y a enfin une autre série de coins prismatiques, mais qui sont employés pour produire leurs effets sur des surfaces cylindriques; nous en parlerons quand nous traiterons de l'équilibre du tour.

8. Les variétés du coin conique ou pyramidal sont également très-nombreuses. On rencontre parmi elles tous les instrumens pointus, comme les épées, les bayonnettes, les broches, les clous, les chevilles de toute espèce, les aiguilles et les épingles; ces diverses machines obéissent d'une manière d'autant plus efficace à la pression que leur longueur est plus considérable par rapport à la superficie de leur tête. Cet ordre de coins renferme encore les dents dont les limes sont hérissées, et qui, servant à rayer les corps sur lesquels on promène ces limes dans tous les sens, finissent par abattre toutes les aspérités dont les surfaces de ces corps étaient couvertes.

Il est bon d'observer, par rapport aux limes, une chose importante sur la manière de s'en servir. Ces instrumens sont en général formés d'un acier

dur et cassant, et leurs dents se présentent sous la forme de pyramides quadrangulaires d'autant plus élevées par rapport à leur base que la lime a, comme on le dit, plus de mordant (fig. 10). Si l'on se hasardait à employer une lime neuve sur un métal dur, comme de l'acier ou de la fonte, une grande partie de ces dents ne pourraient point résister au choc, et se brisant à leur base, édenteraient la lime et la rendraient impropre au travail : au lieu de cela, si on l'employe d'abord sur un métal tendre, au bout de quelque tems, les pointes de la lime s'usent sans se briser, et leur résistance à la rupture devient alors assez grande pour qu'on puisse se servir de la lime sur le fer ou l'acier sans craindre de l'émousser.

Ceci vous explique pourquoi les ouvriers habiles sont dans l'usage de se servir de leur limes, d'abord sur le cuivre, puis sur le fer doux, et enfin sur la fonte ou l'acier.

Vous comprendrez aussi par là pourquoi on remplit quelquefois les limes à polir avec de la plombagine ou du fer oxidé. C'est autant pour éviter de briser les dents de la lime, que pour les empêcher de pénétrer trop profondément dans la surface à polir.

A tout ce que nous venons de dire, il importe de joindre quelques observations sur la manière dont on agit sur le coin. Ces observations sont plus importantes qu'on ne l'imagine souvent.

9. Quelquefois l'on agit sur le coin par pression ; alors son action est peu énergique, à moins qu'on ne l'aide par un mouvement de translation le long de son tranchant : pour bien concevoir son effet dans cette circonstance, il est indispensable d'imaginer tous les tranchans comme garnis d'aspérités très-petites, mais cependant réelles. Alors le coin agit à la manière d'une scie, dont les nombreuses dents seraient imperceptibles à l'œil ; c'est ainsi qu'il faut envisager l'action des couteaux, des bistouris, (fig. 11), des scalpels, des scies à scier les marbres durs et de beaucoup d'autres instrumens. Souvent aussi on aide alors l'action du coin par un mouvement de rotation. C'est ce qui arrive dans les forets à percer le métal, (fig. 12), dans l'emploi de l'alène des cordonniers, du foret des tourneurs et des luthiers. On conçoit facilement que cela a pour but de mettre tous les angles et les aspérités de ces instrumens en contact avec le corps qu'ils détruisent ainsi peu à peu, et dans lesquels ils se pratiquent enfin un passage.

10. Mais le plus souvent c'est par le choc qu'on chasse le coin dans les corps qu'on veut diviser ; alors il se passe quelque chose qu'il est important de remarquer. Je vais prendre pour exemple le coin ordinaire à fendre le bois (fig. 13.)

Lorsqu'un tel coin a pénétré dans le bois jusqu'à une certaine profondeur, au moyen d'un choc

plus ou moins fort on l'y fait entrer d'avantage ; alors, si l'on prête attentivement l'oreille, et surtout, si le bois est fort élastique, tel que du jeune chêne, on distingue un intervalle sensible entre le bruit du coup de marteau et celui qui annonce que le bois s'est fendu plus loin, qu'il ne l'était au moment du choc ; ainsi l'effet du choc n'est pas produit de suite : vous allez voir pourquoi.

Dans la position d'équilibre qui précédait le choc, ce coin tenait écartées l'une de l'autre, et dans un certain état de courbure, les parois du bois qu'il avait divisées ; après le choc, le coin qui pénètre plus profondément les écarte encore davantage, ce qui se fait partie en allongeant la fente déjà faite, et partie en augmentant la courbure des parois, et par suite celle des pièces dont elles forment la surface intérieure. Mais bientôt ces pièces font effort pour se redresser, et ne pouvant le faire du côté du coin qui met obstacle à leur rapprochement, elles agissent sur la partie qui leur est encore commune, et prolongent la fente déjà faite, ce qui produit le second tems de l'action du coin dont nous avons parlé. Ainsi, une partie de cette action est due immédiatement à la force du choc, l'autre à l'élasticité du corps qu'on veut diviser.

Ceci rend parfaitement raison des modifications que l'on rencontre dans les résultats de l'application du coin. Vous savez que plus un corps est

élastique et fibreux, plus il cède avec facilité à la division par le coin. Ainsi, les buches de chêne vert se fendent avec la plus grande facilité, tandis que le coin ordinaire ne produirait autre choc sur le liége, que d'y faire un logement égal à son volume. L'acier se divise aisément ainsi; la cire jaune, légèrement échauffée et devenue ductile, demanderait à être attaquée dans tous les points, pour se laisser couper. L'explication de tous ces faits se trouve tout entière dans ce que nous venons de dire. C'est aussi pour cela qu'on ne peut enfoncer dans le bois un clou sans précaution, ou bien on l'expose à se fendre.

La manière d'agir d'un corps élastique soumis à l'action d'un coin, n'est pas toujours la même; mais il suffit que vous soyez prévenu que l'élasticité joue un rôle dans cette question de mécanique, pour qu'avec un peu d'attention vous puissiez en reconnaître et en apprécier l'influence; et si nos leçons subséquentes ne sont pas stériles, vous pourrez facilement trouver le système de coin le plus convenable à la circonstance qui se sera présentée.

11. Lorsque c'est par le choc que l'on aide le coin, il arrive quelquefois qu'on le fait agir par son propre poids : c'est le cas des sabres, des haches (fig. 14), des coignées (fig. 15), des herminettes (fig. 16); des pics et des pioches de mineur (fig. 17), instrumens qui présentent à la

fois le coin prismatique uni au coin pyramidal, lorsqu'ils sont destinés à servir dans des terreins qui offrent dans un court espace des roches de densités différentes, tantôt assez molles pour admettre l'action du côté large et tranchant, tantôt assez dures pour exiger celle du côté pointu.

D'autre fois, c'est un marteau plus ou moins lourd, de bois ou de métal, qui sert à frapper sur la tête du coin : tels sont les outils à la main du mineur, comme le forêt (fig. 18) ou l'aiguille du mineur, le ciseau plat et la pointe (fig. 19) du tailleur de pierre, la pointerolle du roqueteur (fig. 20).

Ces deux procédés ne sont point employés au hazard : si vous voulez produire une action puissante, le plus simple raisonnement vous indique d'employer la masse même du coin pour en aider l'effet; mais alors l'endroit ou le coup sera porté devient incertain, et toute l'expérience possible ne ramenera pas à tout coup le tranchant de votre instrument au point qu'il a déjà frappé. Voulez vous au contraire ne porter l'action du coin que sur un point ou une série de points donnée, alors il faudra séparer du coin la masse qui produit le choc : le tems nécessaire pour opérer deviendra plus considérable mais vous n'aurez point produit d'effet nuisible ou dépensé de force inutile. Ce n'est point tout encore : la nature de la substance sur laquelle vous devrez agir devra modifier jusqu'à la forme du coin : s'il s'agit d'entamer une substance légère

et tendre, un tranchant mince, large et affilé sera plus convenable ; au contraire si vous devez agir sur une substance dure et résistante, il faudra à la fois diminuer le nombre des points de contact et augmenter la solidité du coin ; alors, le coin pyramidal et conique à large base sera le système à préférer : entre ces deux extrêmes, la forme du coin passera par tous les intermédiaires qui se trouvent remplir l'intervalle du coin prismatique large et tranchant au coin pyramidal court et obtus. Ainsi, vous employez le rabot pour les bois, et la lime déjà un peu émoussée pour l'acier ; tandis qu'entre ces deux limites le rabot à lame dentée et obtuse sert a dresser les bois durs et même quelques métaux tendres.

L'élasticité même des corps doit entrer pour beaucoup dans votre choix ; en sorte, que dans tout ceci comme dans tout ce que nous avons déjà vu de la mécanique, rien ne peut être livré au hasard, et avec un peu d'attention et d'observation il est facile de se rendre une raison de tous les procédés indiqués par l'expérience, et souvent de les remplacer par de meilleurs. (*)

(*) C'est principalement dans l'art des mines qu'il importe d'examiner avec le plus grand soin la nature et les variétés des coins nombreux qu'on y employe. Tantôt, si la roche a entailler est molle, on doit se servir des coins prismatiques larges, comme la pioche, le hoyeau; tantôt dans une roche dure, il sera nécessaire d'user successivement d'un grand nombre de variétés du coin

11. Si l'on veut introduire la condition du frottement dans l'équilibre du coin, il sera facile d'en venir à bout en se rappellant ce que nous avons dit à cet égard dans la leçon précédente.

---

pyramidal. Dans l'un comme dans l'autre cas, la dureté et l'élasticité de la roche influent d'une manière sensible sur l'effet produit avec tel ou tel instrument, et non-seulement il faut varier la forme du coin, mais même sa masse et la nature du corps destiné à lui donner le mouvement par le choc : aussi de certaines roches veulent qu'on se serve de maillets de bois, d'autres de maillets de fer. Malgré qu'au premier coup d'œil l'influence de ces modifications ne se fasse pas sentir, elles sont pourtant de nature à ne devoir jamais être négligées ; car surtout dans les grandes mines, la plus légère cause de rallentissement dans le travail des ouvriers se fait rapidement sentir à l'exploitant.

Dans les roches dures la pointerolle est l'instrument le plus usité ; les espagnols et quelques autres nations s'en servent à la main et à peu près comme les tailleurs de pierres tiennent leur ciseau; mais il y a à cela le désavantage de ne pouvoir employer de petites pointerolles ce qui souvent est avantageux.

Les allemands emmanchent les leurs au bout d'un bois de 15 pouces environ ; ils peuvent ainsi employer des pointerolles de 10 jusqu'à 20 ou 22 centimètres : chaque mineur en porte plusieurs de ces diverses dimensions enfilées dans un cuir qu'il passe par-dessus son épaule afin de porter son équipage à la manière des besaces. On voit dans la figure 20 la trousse d'un mineur saxon : elle ne peut, avec ses dix-huit pointerolles, servir qu'un jour environ sans être ravirée.

L'ouvrage que l'on fait à la pointerolle, demande plus

Les pressions Q et P, (fig. 4) normales aux faces du coin produisent chacune une certaine quantité de frottement qui sera pour la force P égal à $f \times P$ et pour la force Q égal à $f \times Q$, f étant le rapport du frottement à la pression pour les surfaces dont il s'agit.

En sorte qu'il faudra tenir compte dans l'équilibre de deux nouvelles forces, l'une agissant dans le sens de AC et égale à $f \times P$ l'autre dans le sens de BC et égale à $f \times Q$.

Or, en observant qu'en vertu de la symétrie du coin par rapport à la droite qui coupe en deux l'angle ACB, les forces ou résistances P et Q doivent être égales, il est clair que les forces $f.$ P et $f.$ Q sont aussi égales et par suite que leur résultante est parallèle à la force R. Il est également facile de voir qu'elle se confondra avec cette force par suite de la même symétrie, et ainsi au lieu de la force R seule on aura la force R augmentée ou diminuée de cette résultante, selon que le coin tendra à sortir de l'ouverture faite ou a y rentrer. Voyons maintenant la valeur de cette résultante.

Il est facile de remarquer que si l'on porte sur C*b* et C*a* deux longueurs proportionnelles à $f.$ Q et $f.$ P, et par conséquent égales, le parallélo-

d'adresse et d'habitude que de force ; il se borne à découvrir la roche que l'on veut faire sauter à la poudre ou faire tomber à l'aide de coins, sur le plus grand nombre possible des faces.

gramme construit sur ces deux droites aura pour diagonale le double de la longueur *Cd* distance du sômmet de l'angle C a l'endroit ou la droite *ba* est coupée par le prolongement de la force R. Ainsi nous aurons en appelant R' la résultante des forces $f \times$ P et $f \times$ Q.

$$R' : f \times P :: 2.\overline{Cd} : \overline{Ca}$$

et comme on a aussi

$$\overline{Cd} : \overline{Ca} :: \overline{CD} : \overline{CA}$$

cette proportion devient

$$R' : f \times P :: 2.\overline{CD} : \overline{CA}$$

d'où

$$R \pm R' = R \pm 2.\frac{CD}{CA} \times f \times P.$$

et aussi

$$R \pm R' = R \pm 2.\frac{DC}{CB} \times f \times Q.$$

à cause de l'égalité de P et de Q.

Maintenant il faut, pour que les trois forces R ± R', P et Q soient en équilibre, qu'elles aient entre elles, les mêmes rapports que les côtés auxquels elles sont perpendiculaires, en sorte qu'on devra avoir

$$R \pm R' \text{ ou } R \pm 2.\frac{CD}{CA} \times f \times P : P :: AB : AC$$

$$\text{et } R \pm R' \text{ ou } R \pm 2.\frac{CD}{CB} \times f \times Q : Q :: AB : BC.$$

Ce qui donne pour la valeur de R

$$R = P \times \frac{\overline{AB} \pm 2.f \times \overline{CD}}{AC}$$

$$\text{et } R = Q \times \frac{AB \pm 2.f \times CD.}{BC}$$

La première valeur est évidemment celle qu'il faut donner à R pour empêcher le coin de sortir en vertu des pressions qu'il éprouve de la part des parois du corps qu'il a fendu, la seconde est au contraire celle qu'il faut lui donner pour obtenir les pressions P et Q nécessaires pour résister à la réaction du corps.

Or, il résulte delà quelque chose de bien remarquable : c'est que la force R produite par les réactions P et Q peut être nulle ou même négative. Il suffit pour cela que l'on ait

$$2.f.\overline{CD} = \text{ou} > AB.$$

$$\text{ou bien} \qquad f = \text{ou} > \frac{\frac{1}{2}\, AB}{CD.} \; (^{*})$$

Dans le cas où la première condition est remplie, le coin est en équilibre en vertu de l'impulsion

(*) Ceci équivaut à l'équation

$$f = \text{ou} > \text{tang. } \tfrac{1}{2}\, C.$$

Ainsi il faut seulement pour l'équilibre que la moitié de l'angle du tranchant du coin soit égale à l'angle du frottement ou plus petite que cet angle.

qu'il reçoit des forces P et Q et du frottement qui en résulte; si c'est la seconde condition qui est remplie, alors il faudra au contraire faire effort pour arracher le coin du logement qu'il s'est fait.

Pour mieux fixer nos idées à ce sujet, prenons un exemple : supposons un coin de fer enfoncé dans du chêne. La quantité f est égale à environ 0.03. Nous aurons donc :

$$R = P \times \frac{AB - 0.06 \times CD.}{AC.}$$

valeur de R qui devient nulle quand on a

$$\frac{AB}{CD} = 0.06.$$

C'est-à-dire, que si le rapport entre la face du coin et sa tête, est environ un seizième, dans quelque position qu'on ait enfoncé le coin, il restera en équilibre de lui-même en vertu du frottement.

Si ce rapport va plus loin, alors il faudra pour l'ôter un effort d'autant plus grand que la pression Q ou P sera plus forte.

C'est ce principe qui fait qu'après avoir enfoncé un clou dans du bois, il faut souvent une force considérable pour l'en retirer. La même chose arrive quand on a donné un coup de hache sur du bois dur et résistant; la pression produit alors un frottement qu'il est quelquefois difficile de

vaincre, et qui nécessite l'usage des coins pour dégager l'instrument tranchant.

C'est encore sur cela que repose l'usage et l'emploi des chevilles qu'on chasse avec force dans des trous cylindriques ou coniques, pour assurer les assemblages de menuiserie ou de charpente.

Enfin, une application très-importante de ce que nous venons de dire, c'est l'emploi des pilots. Un pilot n'est autre chose qu'un cylindre de bois, terminé par un coin qu'on arme d'une garniture en fer nommée sabot, destinée à éviter que le pilot ne se fende ou ne s'émousse. Au moyen d'un *mouton* ou d'une masse de fer d'un poids considérable, on enfonce le pilot jusqu'à ce que le frottement latéral ne puisse plus être vaincu par le choc du mouton. C'est ce qu'on appelle battre un pilot jusqu'au *refus*. Vous voyez maintenant que le frottement exercé sur ce pilot doit être énorme, et d'après cela qu'indépendamment de la solidité que cette opération a donné au terrein par la compression, ce pilot lui-même doit être assuré d'une manière solide contre toute puissance qui tendrait à le chasser hors du trou où on l'a logé.

STATIQUE.

SIXIÈME LEÇON.

De l'Equilibre de la poulie et des moufles. Des cordes et de leur résistance à la traction.

1. Une poulie est une très-petite machine au moyen de laquelle on lie entre eux deux systèmes quelconques dont l'un est fixe et l'autre mobile, et dont on peut faire varier les distances à volonté : cette machine, peu compliquée, est surtout utile pour développer une puissance considérable dans des espaces resserrés, et où des circonstances particulières excluent l'emploi des autres machines simples à cause de leur poids et de l'emplacement qu'elles occupent.

Réduite elle-même à sa plus grande simplicité, la poulie se compose principalement d'un *rouet* ou surface de révolution AA (Planche VII, fig. 1.) ayant à sa circonférence une cavité ou gouttière engendrée par la révolution d'un arc de cercle, et qu'on nomme *gorge*. Ce rouet est suspendu dans l'intérieur d'une *chappe* ou enveloppe BB au moyen d'un *axe* DD tournant librement dans le rouet, et arrêté dans la chappe par une clavette E.

Pour se servir de la poulie, on passe une corde CC autour du rouet en la logeant dans la gorge, et alors, soit que l'on ait arrêté l'un des bouts de cette corde, en suspendant un poids ou une puissance à l'autre, soit qu'au contraire on ait fixé le crochet F qui soutient la chappe de la poulie, soit enfin qu'on ait appliqué trois puissances aux deux bouts de la corde et au crochet, la question d'équilibre se réduira toujours au même, savoir à déterminer les rapports entre trois forces P, Q et R dont deux sont dirigées suivant les cordons CC et dont la troisième passe par l'axe de révolution de la poulie.

2. Considérons donc (fig. 2) un cordon inextensible et flexible passé autour du cercle ABO et tendu par deux forces P et Q, tandis qu'une troisième force R, attachée au centre O du cercle, tend à entraîner ce centre et le cercle en sens contraire de la traction exercée par les forces P et Q. Il est d'abord visible que la tension du cordon est la même dans toute son étendue depuis le point P jusqu'au point Q : or, cette tension est représentée aux deux bouts par les forces P et Q; ces deux forces sont donc égales. Ainsi la première condition est que les forces qui agissent sur les deux bouts de la corde qui embrasse le rouet de la poulie soient égales.

Si vous vous rappelez maintenant ce que nous avons dit de l'équilibre de trois forces sur un plan,

vous verrez que pour qu'il ait lieu dans ce cas-ci, il faut que les trois forces P, Q et R soient concourantes, c'est-à-dire se rencontrent dans un même point C, et si nous joignons à cette condition celle déduite du parallélogramme des forces, nous aurons la relation entre les trois forces P, Q, R, puisque cette dernière peut être maintenant considérée comme égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Ainsi donc, si sur les directions des forces P et Q vous prenez des longueurs égales aC et bC, pour représenter les forces égales P et Q, et si vous construisez le parallélogramme $aCbC'$ sur ces deux droites, la diagonale de ce parallélogramme CC' représentera la grandeur et la direction de la force R : d'où il est facile de conclure, que la direction de la force R partage en deux l'angle formé par la direction des deux parties du cordon qui soutient la poulie; en sorte que la condition d'équilibre est ici la même que celle que nous avons trouvée dans le cas d'une corde tendue au moyen d'un anneau, dans notre première leçon.

D'après cela si l'on suppose l'axe de la poulie fixe, on voit que la machine dont nous venons de parler ne fait rien gagner à la force, puisque la puissance P transmise par le cordon, est toujours égale à la puissance Q qui peut être censée l'occasionner; cependant, dans cet état de choses, la poulie offre déjà un moyen simple et facile de

changer la direction d'une force, ce qui n'est pas un petit avantage dans un grand nombre de cas. C'est une application de ce genre que vous voyez tous les jours, lorsqu'au moyen d'une poulie, on monte un fardeau au haut d'une maison, par l'intermédiaire d'une corde passée sur la poulie et tirée par un ou deux hommes placés dans la rue et qui employent à la fois leur poids et leur force.

3. Mais si au lieu d'en agir ainsi on fixe un des bouts F de la corde (fig. 3), et qu'on attache la puissance R à l'axe de la poulie au moyen de sa chappe, il ne faudra, pour faire équilibre à cette puissance, qu'une force P représentée par C*b*, tandis que R le sera par CC'. Et en effet, dans cette circonstance la force Q dont nous avons parlé tout-à-l'heure (2) se trouve évidemment remplacée par la résistance de l'appui fixe F. Or, on voit aisément que tant que l'angle C'C*b* ne dépassera pas 60 degrés, la ligne C*b* sera plus petite que CC', et par conséquent que la force P sera toujours plus petite que la force R qu'elle doit tenir en équilibre : passé cette limite, le désavantage sera du côté de la force P; mais au contraire au fur-à-mesure que l'angle C'C *b* diminue, la force P diminue aussi, et enfin quand cet angle est nul, on voit aisément que les deux côtés du parallélogramme se confondent avec sa diagonale, et que la force P n'est plus que la moitié de la puissance R.

4. C'est sur cette propriété que se fonde l'emploi de diverses machines simples auxquelles on a donné le nom générique de moufles.

Un moufle n'est autre chose qu'un assemblage de poulies disposées de diverses manières, suivant les circonstances ; mais cependant destinées à obtenir un effet unique. Tout les moufles peuvent se rapporter aux trois dispositions suivantes ou à leurs combinaisons.

I. Concevons plusieurs poulies o, o', o'' (fig. 4) mobiles et suspendues par des cordons dont les bouts A, A', A'', sont fixes et dont les autres bouts soient disposés de manière que celui qui embrasse la poulie o soit attaché au centre de la poulie o', que celui qui embrasse la poulie o', soit fixé au centre de la poulie o'', et ainsi de suite; de manière cependant que tous ces cordons soient parallèles. Faisons passer sur la gorge de la poulie fixe o''' le cordon qui soutient la dernière poulie mobile o'', puis attachons à ce cordon un poids P et au centre de la première poulie mobile o un poids R. On voit que ce dernier ne peut prendre de mouvement sans que par la disposition de l'appareil entier P n'en prenne aussi, ainsi ces deux poids réagissent l'un sur l'autre; il peut donc y avoir équilibre entre eux : cherchons les conditions de cet équilibre.

D'abord si nous considérons la tension t du cordon qui soutient la poulie o, comme une force, nous aurons pour l'équilibre la condition que nous avons

démontrée plus haut, laquelle revient à l'équation

$$2\,t = R.$$

Si l'on considère ensuite t comme une puissance tirant la poulie o', et équilibrée par la tension t' du cordon qui soutient cette poulie, on aura encore

$$2\,t' = t$$

désignant enfin par t'' la tension du cordon qui soutient la poulie o'', nous aurons encore

$$2\,t'' = t'$$

et comme t'' est évidemment égal au poids P soutenu par la tension du dernier cordon, on aura, au lieu de l'équation $2\,t'' = t'$, celle-ci :

$$2\,P = t'$$

De ces diverses équations on tire les suivantes :

$$R = 2.\ 2\,t'$$

$$\text{et } R = 2.\ 2.\ 2\,P$$

$$\text{ou enfin } R = 2^3 \times P.$$

C'est-à-dire que pour que l'équilibre ait lieu, il faut que le rapport du poids R au poids P soit égal a 2 élevé a une puissance représentée par le nombre des poulies o, o', o'', qui composent le moufle, en exceptant la poulie de renvoi o''' qui d'ailleurs n'est qu'un accessoire de la machine.

Ainsi, dans le cas où le moufle aurait six poulies, on trouverait pour le rapport entre P et R l'équation

$$R = P \times 2^6 = 64 \times P$$

en sorte que pour soutenir un poids de 64 kilogrammes, il suffirait avec un semblable appareil d'un poids d'un kilogramme.

Vous voyez donc qu'on peut dans le système dont nous venons de parler rendre très-considérable le rapport entre la puissance et la résistance, et par conséquent donner beaucoup d'avantage à cette dernière. Cette machine est aussi la plus puissante de celles dont nous nous sommes proposé de parler : cependant elle est rarement employée à cause de l'énorme trajet que la petite force doit parcourir, si l'on veut donner un mouvement à la plus grande ; en outre elle exige un support d'une étendue qu'il n'est pas toujours possible de lui donner : les systèmes suivans n'ont pas les mêmes avantages sous le rapport de la relation entre R et P; mais ils sont exempts de tous les inconvéniens qu'on peut reprocher à celui que nous venons de décrire.

II. Supposons donc deux systèmes composés chacun d'un certain nombre de poulies enfilées sur un axe commun et ayant une chappe commune (fig. 5): l'un des deux étant suspendu à un appui fixe, l'autre mobile, faisons passer autour des poulies un cordon attaché en F à la chappe du moufle supérieur de manière à ce qu'il embrasse alternativement une poulie du moufle supérieur et une du moufle inférieur, puis suspendons à ce dernier un poids R et tendons le cordon avec une force P; il est visible que ce cordon sera

tendu également dans toute son étendue, en sorte qu'on pourra considérer le poids R comme soutenu par autant de forces égales et parallèles qu'il y a de cordons parallèles passant d'une poulie à l'autre : par conséquent le rapport entre la force R et la force P qui est la même que la tension d'un cordon, sera représenté par le nombre de ces cordons.

Si donc le nombre des replis du cordon est six, comme dans la figure 5, il suffira que le force P soit le sixième de la force ou du poids P pour lui faire équilibre : ceci ne présente aucune difficulté. Nous remarquerons en passant que le rapport de P à R dans le système que nous venons de décrire est représenté aussi par le nombre des poulies qui composent l'ensemble du moufle.

III. Dans le troisième système, au lieu de placer toutes les poulies sur un même axe, on leur donne seulement une chappe commune (fig. 6) : alors un des groupes de poulies est suspendu à un appui fixe, tandis que l'autre est mobile et supporte le poids R auquel on veut faire équilibre au moyen de la force P.

Il vous sera facile de voir, au moyen des mêmes raisonnemens que pour le cas précédent, que le rapport de la force R à la force P devra être, pour le cas d'équilibre, représenté par le nombre des cordons ou celui des poulies du moufle. Ainsi dans le cas de la figure 6 on aura

$$R = 5 \times P$$

IV. Vous remarquerez facilement que dans l'un et l'autre des deux systèmes de moufles que nous venons d'examiner, l'avantage donné à la force P est bien moins considérable que pour le premier système : car avec les six poulies du 2ᵉ nous aurions obtenu le rapport $R = 2^6 \times P$ ou $R = 64\,P$, et avec les cinq poulies de troisième moufle, nous aurions trouvé $R = 32\,P$; mais ces différences sont compensées par une manœuvre plus facile, par la facilité de faire parcourir à R un trajet aussi grand qu'on le désire et ces deux avantages peuvent, dans la plupart des cas, être mis en balance avec ceux du premier système.

5. Après ce que nous venons de dire, il ne vous sera pas difficile de concevoir l'emploi, ni de trouver les conditions d'équilibre pour les divers systèmes plus ou moins compliqués de poulies que l'on emploie dans les constructions. La description seule de chacun de ces systèmes suffira : la plupart ont leur emploi dans la marine, et en effet de tous les moyens de développer une grande force dans un petit espace, lorsque d'ailleurs on est maître du tems, le plus avantageux sans contredit, c'est la poulie et ses dérivés, joint à cela la facilité qu'offrent la mâture et le gréement des vaisseaux pour lui trouver des points d'appui nombreux et commodes ; enfin la petitesse des dimensions de cette machine, et le peu d'embarras qu'occasionnent son déplacement et sa manœuvre sont autant de raisons qui concourent

à en rendre dans ce cas l'usage presqu'indispensable.

6. L'un des emplois les plus communs de la poulie consiste à donner le moyen de changer la direction d'une force sans changer sa grandeur; alors la poulie reste fixe et on la nomme *poulie de renvoi* ou *poulie simple*.

Quelquefois alors sa chappe est en fer, et dans ce cas (fig. 1), elle est ordinairement suspendue au moyen d'un crochet mobile dans la chappe et destiné à donner un mouvement de rotation à la poulie pour dégager les cordes qui pourraient se mêler ensemble : une semblable poulie s'appelle *poulie à tourniquet :* c'est celle qu'on emploie dans les constructions de bâtisse, soit que la chappe embrasse une seule poulie, soit qu'elle en soutienne plusieurs à la fois.

D'autres fois la chappe est en bois; elle est alors formée à peu près comme un melon aplati, coupé ou creusé dans l'intérieur pour y loger le rouet de la poulie : dans ce cas la chappe prend le nom de *caisse* de la poulie, les faces extérieures sont les *joues* de la caisse : dans la caisse se trouvent deux trous cylindriques, dont l'axe commun est perpendiculaire au plan de la mortaise à jour où se loge le rouet, et qui sont destinés à recevoir l'axe autour duquel ce rouet prend son mouvement de rotation.

Quelquefois cette caisse de poulie est embrassée par une *estrope* ou cordage qui l'entoure dans le

sens de sa longueur (fig. 7) et sert à fixer la poulie au point d'appui. D'autres fois (fig. 8) l'estrope se prolonge beaucoup au delà du nœud, et la poulie peut flotter en l'air, c'est alors une poulie *estropée à plein fouet.*

Quelquefois la caisse est embrassée par un lien de fer, qui l'entoure en portant des trous pour recevoir l'axe du rouet. Ce lien se termine en haut par un crochet qui sert à suspendre la poulie. Ce système est souvent employé dans la marine.

Dans tous ces cas, du reste, la poulie est toujours une poulie de renvoi. Lorsqu'elle est mobile, elle est ordinairement destinée à servir de poulie inférieure à un palan, et alors le crochet ou le nœud de l'estrope se trouve au-dessous de la poulie : on appelle dans ce cas, poulie simple à croc, celle (fig. 9) qui est terminée par un crochet.

7. Ce que nous avons dit des chappes des poulies simples peut s'appliquer aux moufles, dont les chappes sont tantôt en bois et tantôt en fer ou en métal quelconque.

La figure 11 vous représente une forme assez généralement adoptée pour les moufles en métal : ils sont composés d'un certain nombre de plaques de métal traversées par une axe fixe qui sert d'essieu commun aux poulies du moufle; ces plaques assujetties à des distances égales l'une de l'autre par des barres perpendiculaires à leurs plans sont liées à la barre qui soutient le crochet par deux

fortes joues en fer forgé qui se rapprochent l'une de l'autre au moyen de trois boulons à écrous. Cette manière d'assembler un moufle permet de le démonter facilement et de réparer isolément les pièces qui auraient souffert quelque dommage dans le travail. La corde est attachée au moufle inférieur par un anneau fixé à sa partie supérieure : on le fait passer de là sur une des poulies du moufle supérieur, puis successivement sur les autres poulies du moufle inférieur et du moufle supérieur en alternant entre les deux.

Dans la construction que je vous indique, vous voyez que le moufle inférieur aura une poulie de moins que le moufle supérieur.

Il ne sera pas difficile d'ailleurs, en vous rappelant ce que nous avons dit plus haut, de voir que le crochet inférieur avec le fardeau qu'il soutient sera supporté par cinq cordes, ayant toutes la tension du bout du cordon tendu par la force ; ainsi l'équilibre aura lieu, dès que cette dernière sera cinq fois égale à la force.

Vous voyez que dans l'hypothèse d'un système comme celui que je viens de vous montrer, le rapport du poids à soutenir à la force qui le soutient est justement égal au nombre des rouets ; ce qui est facile à connaître du premier coup-d'œil.

Un assemblage de moufles semblable à celui que nous venons de décrire, se nomme *palan*.

8. Quelquefois, au lieu de chappes de fer ainsi

disposées on encaisse les poulies, accolées sur un axe commun, dans une caisse de bois : mais cette construction est rare, à cause de la grande épaisseur que l'on devrait donner à la caisse. Quand on veut se servir de caisses de bois, il vaut mieux *étager* les rouets, c'est-à-dire les placer dans une mortaise unique, ou du moins dans plusieurs mortaises enfermées entre les deux mêmes plans parallèles. La figure 12 et la figure 13 vous donnent une idée de cette disposition : seulement vous remarquerez que dans la fig. 13, il se trouve encore deux rouets sur le même axe ; c'est ce que l'on fait quand les circonstances le permettent sans trop augmenter le volume de la caisse.

Les moufles ainsi construits ont un inconvénient qui tient à ce que les cordes tendent à frotter les unes sur les autres, ce qui oblige à faire les rouets de différentes grandeurs : on a l'habitude de faire suivre les rouets en les faisant décroître depuis le plus grand jusqu'au plus petit, de telle manière que chacun ait pour diamètre les deux tiers du diamètre du rouet précédent. Cette méthode amène un inconvénient qui est d'augmenter l'action de la résistance due au frottement et à la roideur des cordes : c'est ce que nous verrons plus tard, à l'article du treuil. L'assemblage de la fig. 13 évite une partie de cet inconvénient, et c'est ce qui détermine à l'employer dans plusieurs circonstances.

Quelquefois cependant on se sert de moufles

dans lesquels les cordes sont enroulées autour d'un cylindre commun, dont l'axe est perpendiculaire à l'action de la résistance : voici le cas dont il s'agit.

9. Les mâts des navires, et aussi quelquefois les pièces des grandes chèvres sont retenues dans une position fixe, au moyen de puissants cordages qui les lient d'une manière solide au système dont ils font partie. Ces cordages dans un navire portent le nom de *haubans*, quand ils tendent à éviter les mouvemens du mât dans le sens de la largeur du vaisseau, et *étais* quand ils ont pour but d'empêcher ce mouvement dans le sens longitudinal. Dans les deux cas, une condition qu'ils doivent remplir, c'est d'être fortement tendus : pour y arriver, d'une part on enveloppe le câble autour d'une forte poulie (fig. 14) dont la forme est une surface de révolution qui porte à son contour une rainure pour loger le hauban ou l'étai. Une autre poulie de même forme est fixée à quelque partie solide du bâtiment par des frettes de fer fortement arrêtées. Les deux poulies sont en outre percées d'un nombre plus ou moins grand de trous de tarrière, qu'on évase de manière à ce que la surface sur laquelle s'appuiera la corde destinée à joindre les deux moufles figure une surface annulaire de révolution. On fait ensuite passer cette corde dans tous ces trous en allant alternativement de l'un à l'autre, puis on tend cette corde pour rapprocher les poulies. Il est visible que ce système représente exactement un moufle

dont on aurait enlevé les rouets, et qu'ici la tension supportée par le câble, sera représentée par la somme des tensions des parties droites de la corde qui passe de l'une des poulies à l'autre. Il vous sera donc facile de voir quel est l'effort qu'on peut de cette manière exercer sur un cordage quelconque, en connaissant celui dont on peut disposer pour tendre le cordon auxiliaire.

Cette action de tendre un cordage s'appelle en terme de marine *rider :* ainsi l'opération dont nous venons de parler se nomme rider un ***hauban*** ou un *étai ;* le cordon qui rapproche les poulies s'appelle *ride-hauban* ou *ride-étai.*

10. Les poulies et les moufles sont d'un usage continuel dans les constructions civiles et militaires. Ce sont elles qui forment la puissance de quelques machines très-simples, comme les chèvres et les grues; seulement quelquefois elles s'y combinent avec l'action du treuil et du levier. Au reste, nous verrons plus tard leur emploi dans ces différens cas.

11. Voici quelques réflexions utiles sur les moufles et les poulies, et qui se dirigent principalement vers leur construction.

Les chappes en fer ont l'avantage sur celles en bois, d'occuper moins de place; mais elles sont plus pesantes : elles offrent en outre de la facilité pour loger tous les rouets sur un axe commun, ce qui permet de garder le même diamètre à tous

ces rouets ; et ce qui aide à conserver tous les cordons parallèles ; mais dans ces chappes, les cloisons étant minces et tranchantes favorisent l'usé des cordes en frottant sur elles ou en les laissant frotter l'une sur l'autre. A cet inconvénient s'en joint un autre plus grave ; c'est le danger des ruptures qui se font dans le fer d'une manière plus imprévue que dans le bois, et qui peuvent occasionner des accidens très-graves. Il semble donc, à tout prendre, que les caisses ou chappes en bois sont les plus convenables : mais elles veulent être frétées avec soin et faites en bois choisi et plein de nerf. L'orme est celui qu'on emploie le plus généralement.

12. Les rouets, lorsqu'ils doivent avoir une grande dimension, se font ordinairement en bronze. On pratique à leur circonférence une gouttière, dont la forme est celle d'une surface annulaire de révolution, engendrée par un arc de 180°. Cette gouttière est destinée à recevoir la corde qui doit s'enrouler autour du rouet, et à l'empêcher de s'échapper soit à droite soit à gauche. Pour diminuer le poids du rouet, on évase ses faces circulaires, ce qui a encore l'avantage de ne le faire toucher que par un petit nombre de points contre les joues intérieures de la mortaise qui le renferme. La figure 15 offre tous les détails d'un pareil rouet, ainsi que de son essieu et de la clavette qui le retient dans le moufle.

Lorsque l'on fait de petites poulies, quelquefois les rouets sont en bois : on emploie alors pour cet objet les bois de gayac, d'orme ou de buis; les plus durs sont naturellement les meilleurs : encore faut-il les garnir à leur centre d'un *dé* de métal destiné à recevoir l'axe autour duquel le rouet doit tourner. Ces dés qui sont percés d'un trou cylindrique, dont le diamètre est un peu plus grand que celui de l'essieu, doivent tenir fortement dans le rouet. On leur donne pour cela diverses figures, tantôt carrés ou triangulaires, tantôt en feuilles de treffle : la meilleure de ces méthodes est celle qui permet d'obtenir la même solidité avec le moins de matière et surtout de main d'œuvre. J'ai moi-même quelquefois employé le moyen suivant dans les travaux militaires que j'ai dirigés et il m'a toujours bien réussi.

Il consiste à faire entrer en le vissant de chaque côté du rouet un morceau de cuivre fondu de manière à présenter à l'intérieur un prisme carré, et à l'extérieur un pas de vis à filet profond. Il faut observer que les deux pas de vis sont tels que si l'un entre en tournant à droite, l'autre pénètre en tournant à gauche. Quand les deux morceaux sont à peu près affleurés par la joue du rouet, on les fait traverser par un prisme carré de cuivre qui entre par force dans les deux pièces, et qui doit contenir le trou cylindrique destiné au passage de l'axe. Après cela on achève le tout sur le tour. Ce moyen d'assembler un axe métallique avec un

cylindre de bois m'a servi dans plusieurs autres circonstances, et c'est parce que je m'en suis bien trouvé que je le conseille.

Lorsqu'on loge plusieurs poulies sur le même axe dans une chappe de bois, on laisse entre elles un diaphragme ou une cloison d'environ l'épaisseur du rouet. L'espace entre la mortaise et la gorge du rouet ne doit avoir que la largeur indispensable pour laisser passer le cordage sans frottement. En total, il faut laisser à la caisse le plus de bois possible; cette condition est essentielle pour la solidité.

13. La main d'œuvre des caisses de poulies est encore une chose importante : comme il est impossible, sans leur donner trop de pesanteur, de leur conserver une forme prismatique, on abat le bois aux extrémités en conservant la plus grande épaisseur à la partie qui doit supporter l'axe. C'est à cela que se doit la forme ovoïde de la plupart des caisses de poulies : Mr. Brunel a imaginé de les terminer par des surfaces cylindriques droites à bases circulaires. Voici comme Mr. Dupin décrit ce procédé qu'il a le premier fait connaître en France.

« Sur la circonférence d'une grande roue à jour « on fixe des blocs de bois, équarris d'avance et « présentant la longueur, la largeur et l'épaisseur « qui conviennent aux caisses des poulies qu'on veut « fabriquer. Après avoir fixé d'une manière iné- « branlable ces blocs de bois sur la circonférence « de la roue, on la fait tourner d'un mouvement

« uniforme; alors par le moyen d'un outil tranchant, « l'on taille dans chaque bloc de bois la face qui se « présente extérieurement : on taille ainsi chacune « de ces faces suivant un arc de cylindre droit « à base circulaire, qui aurait pour axe l'axe même « de la roue : cela fait, on tourne de deux angles « droits chacun de ces blocs; de manière que leurs « faces extérieures deviennent intérieures par rap- « port au cercle qui les porte ou fait mouvoir la « grande roue, et l'on taille toutes les faces des blocs « de bois devenues extérieures. En prenant ces « blocs pour les placer sur une nouvelle roue d'un « diamètre convenable, on taille les deux faces « encore brutes de chaque caisse de poulie, suivant « deux arcs de cylindre circulaire d'un rayon diffé- « rent, et qui convienne à la forme de la caisse. »

14. Quant à la mortaise dans laquelle doit se loger le rouet, elle se forme à peu près de la même manière que celles des charpentes ordinaires, c'est à dire qu'on commence par ouvrir à ses deux extrémités deux trous cylindriques, au moyen d'une tarière d'un diamètre égal à sa distance, entre les joues de la mortaise, après quoi l'on abat la partie du bois comprise entre ces deux trous. Toute la différence, qui est ici à l'avantage de l'opération dont nous nous occupons, c'est que l'on peut former les joues de la mortaise, au moyen d'une scie à la main qu'on introduit dans l'un de ces trous, et qu'on dirige dans le plan de la joue.

On a aussi employé pour cela des moyens mécaniques. Mr. Dupin cite celui d'un ingénieur français qui paraît satisfaisant : j'en ai vu un autre par lequel on obtient la mortaise, au moyen d'un mouvement continu et uniforme, mais il m'a semblé trop peu perfectionné pour vous en parler ici. Il me suffira de vous dire que l'opérateur principal est une modification de la scie circulaire : elle serait mise en mouvement par la même machine que celle qui opérerait la taille des joues de la caisse, laquelle se ferait d'une manière un peu différente de celle de M. Brunel.

15. Enfin, l'essieu de la poulie est encore une des choses qui méritent attention : quel que soit le système de moufle qu'on emploie, il est visible que l'essieu de chaque poulie supporte un effort équivalent à la résultante des tensions des cordons qui sont enroulés autour de cette poulie ; en sorte que, pour un système donné, il vous sera facile de connaître la charge d'un quelconque des essieux, soit qu'il ne porte qu'une poulie, soit qu'il en porte deux ou davantage. D'après cela, on verra par les règles que nous donnerons plus tard, quel diamètre il faudra donner à l'axe, en connaissant la substance dont il doit être formé.

Le plus souvent, cet essieu doit être de fer forgé et poli avec soin ; quelquefois on le fait en bois, alors on choisit ordinairement le chêne vert, ou quelqu'autre bois dur et nerveux,

Il y a des circonstances où l'effort que supporte l'essieu de la poulie est variable, quoique la direction des cordons ne change pas : dans ce cas, il faut bien observer le maximum des forces résultantes pour ne pas courir la chance de former un essieu trop faible. Un de ce cas se présente journellement à vos yeux ; c'est celui des grandes poulies placées au-dessus des bures dans les charpentes nommées *belle-fleur*, et dont l'usage est, comme vous le savez, de diriger les extrémités des cordons ou chaînes qui montent le minerai hors de l'intérieur de la mine. Indépendamment de la différence de poids du sceau chargé ou non chargé, il y a encore une autre cause de variation dans l'effort supporté par l'axe, c'est celle qui dérive de la variation du poids de la chaîne elle-même ou bien de la corde ; en effet, lorsque le sceau est au fond du bure, la portion de la chaîne comprise entre le tambour et la *belle-fleur* doit soutenir, outre le poids du sceau, celui de toute la longueur de la chaîne depuis la *belle-fleur* jusqu'au fond du bure : il est visible que dans toute autre position de la chaîne la tension de la portion qui aboutit au tambour sera moindre ; ainsi les deux forces qui agissent ici sur la poulie varient continuellement, depuis le moment du départ du sceau jusqu'à celui de son arrivée. Il résulte de là plusieurs inconvéniens que l'on n'a pu jusqu'à présent réussir à corriger, et qui deviennent surtout sensibles, quand au lieu

de cordes ou se sert de chaînes, à cause de l'e cès de pesanteur de ces dernières.

Vous observerez en passant ici, que ce n'est pas seulement l'axe des poulies pour lequel ces variations ont lieu, mais que les divers anneaux de la chaîne sont dans le même cas; ainsi, toutes choses restant les mêmes, ceux des anneaux qui approchent le plus du sceau sont ceux qui ont le moins à souffrir, tandis que le contraire a lieu pour les autres. Ceci vous explique maintenant pourquoi les chaînes destinées à l'usage des mines sont formées d'anneaux d'inégale grosseur. C'est à la fois pour diminuer la charge des plus éloignés du sceau, et économiser la matière dans ceux qui en sont les plus rapprochés.

Ce serait assez naturellement ici le lieu de traiter des théories d'après lesquelles on peut évaluer cette diminution, et de donner en même tems le moyen de déterminer la résistance des différentes cordes ou chaînes qu'on peut employer pour soulever les fardeaux; mais des raisons que vous apprécierez ensuite m'ont fait rejeter dans la leçon où je traiterai de l'équilibre des polygones funiculaires tout ce qui est relatif à la force des cordes et des chaînes, à leur confection et aux résistances inertes qu'elles occasionnent par leurs frottemens et leur roideur.

Je ne me suis point non plus occupé de l'équilibre de la poulie avec les considérations qui résultent du frottement. Je reviendrai sur ce sujet lorsque nous traiterons du treuil.

STATIQUE.

SEPTIÈME LEÇON.

Applications curieuses de la théorie des poulies aux lois générales de l'équilibre des corps solides. Conséquences intéressantes qui en résultent. Théorème de l'égalité des produits des vitesses par les forces, pour deux forces qui se font équilibre au moyen d'une machine quelconque et dont les points d'application seraient mis en mouvement par un mouvement donné à la machine. Loi importante : ce qui se gagne en force se perd en vitesse.

1. Dans la leçon précédente, vous avez vu de quelle importance il était de connaître la théorie des poulies, à cause de leurs nombreuses applications dans les arts et dans les constructions : aujourd'hui, je vais amener votre attention sur un sujet qui vous paraîtra d'abord un peu difficile, mais qui peut vous servir à expliquer une foule de circonstances mécaniques qui pourraient échapper à nos leçons, car je ne puis guère me flatter de rassembler tous les cas qui peuvent se présenter dans les arts, et mon but sera rempli, si je vous

fournis les moyens d'expliquer vous-mêmes l'influence de certaines machines sur l'équilibre des forces, et d'apprécier les causes de cet état. La leçon actuelle a d'ailleurs pour objet de vous prémunir contre une erreur trop commune chez les artistes, et qui consiste à croire que de certains organes mécaniques peuvent accroître la puissance confiée par un moteur quelconque à une machine; erreur non-seulement préjudiciable à l'économie et même quelquefois ruineuse pour l'exécuteur, mais encore propre à diminuer l'effet utile de toutes les machines, en multipliant les causes de destruction, de mouvement et d'absorption inutile des forces vives.

Nous avons vu qu'au moyen des poulies on pouvait non-seulement changer la direction d'une force, mais encore produire par son moyen une force quelconque dirigée dans un sens et sur un point donné. Il devient naturel de voir maintenant si cette propriété peut servir à simplifier la manière de concevoir un système de forces groupées autour des divers points d'un corps solide.

L'exemple suivant vous fournira une preuve de cette possibilité.

Soient a, a', a'', a''' (Pl. VIII fig. 1) etc. divers points situés dans un même plan, mais appartenant à un même corps solide. Supposez qu'à ces points on ait attaché des poulies b, b', b'', b''', etc. puis qu'ayant fixé un cordon en F on fasse passer ce cordon sur les différentes poulies, en le faisant passer en outre

autour des poulies fixes de renvoi b, b', b'', b''' etc., imaginons enfin que l'extrémité de ce cordon soit sollicitée par une force P.

Dans cet état de choses, vous voyez facilement que chaque point a, a', a''..... etc. se trouve dans le même état que s'il était sollicité par la résultante des tensions des deux cordons qui tirent la poulie qui lui est attachée, en sorte que tout le système sera dans un cas absolument le même que si, à la place du cordon et de la force unique P et du point fixe F, on avait appliqué à ses points a, a', a''..... etc., des forces R, R', R''.... etc., isolées et dépendantes pour chaque point de la tension t du cordon et de l'angle formé en ce point par les segmens correspondans du cordon.

D'après cela vous voyez que quel que soit le nombre et la grandeur, ainsi que la direction des forces R, R', R''.... etc., on peut concevoir la possibilité de les remplacer par une force unique au moyen d'un système analogue à celui dont je viens de vous donner l'idée. Ainsi toute question relative à l'équilibre du corps se reduirait à l'examen des effets dus à une seule force : la chose en général serait donc beaucoup simplifiée, et il ne s'agirait plus que de savoir quelle considération il faut introduire ensuite, pour définir en général l'état d'équilibre, et tâcher de rendre cette considération d'un usage assez général pour qu'elle puisse s'appliquer à toutes les circonstances, ou du moins au

plus grand nombre de circonstances possibles, dans lesquelles on n'aurait à considérer que l'action d'une seule force agissant de la manière que nous venons de voir.

2. Avant tout, commençons par quelques réflexions sur la manière d'être intrinsèque des diverses forces qui peuvent agir sur un système; nous n'admettrons pourtant encore que le cas des corps solides ou composés d'assemblages variables, mais en nombre fini, de corps solides.

Une force qui tire vers une certaine partie de l'espace un point quelconque d'un système, peut être de telle nature que son intensité ou sa direction ne dépendent en aucune manière de la position du point sur lequel elle agit, mais en général on doit la considérer comme ayant ces deux élémens influencés par la position du point d'application. L'attraction terrestre présente un exemple des deux circonstances : nous avons vu (*a*) que

(*a*) Le peu que nous savons de statique nous suffit déjà pour trouver la démonstration des belles lois d'attraction et de répulsion des sphères en raison inverse des distances de leurs centres, et directe de leurs masses. Ceux qui s'occupent de physique la verront avec plaisir. Quelques-uns de mes élèves en ont demandé l'insertion dans ces feuilles, et mes autres lecteurs voudront bien me pardonner de l'y avoir placée avec quelques observations sur l'importance de ce théorême, dont la démonstration a été donnée par l'immortel Newton, d'une manière analogue à celle que j'employerai.

pour les objets près de la surface de la terre, les points matériels de même espèce sont attirés vers

---

Soit un point matériel S, attiré par les diverses molécules d'une sphère homogène, que l'on peut concevoir elles-mêmes comme autant de petites sphères homogènes entre elles, jouissant de la faculté d'attirer la molécule S en raison directe de la masse et inverse du carré de sa distance à S, et formant ensemble une infinité de couches concentriques, d'une épaisseur infiniment mince, et si l'on connaissait l'action attractive de chacune sur la molécule S, on n'aurait qu'à ajouter ces diverses actions ensemble, et l'on trouverait celle de la sphère entière.

Examinons donc de quelle manière se comportent vis-à-vis l'une de l'autre une enveloppe sphérique infiniment mince, et une molécule S, placée, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de l'enveloppe sphérique.

Imaginons-la d'abord placée à l'intérieur de l'enveloppe, et faisons passer (fig. 3) un diamètre de la sphère par le point S. Prenons ensuite le point S pour sommet de deux cônes droits infiniment proches et ayant pour axe le diamètre SO. Ces deux cônes couperont la sphère suivant quatre cercles perpendiculaires au diamètre SO, et qui formeront sur sa surface deux bandes très-étroites parallèles entre elles, et dont chacune attirera le point S, mais (il est facile de le voir) en sens opposé. Voyons le resultat de ces attractions.

D'abord, toutes les forces qui attirent le point S de la part de chacune de ces deux zônes, se réduiront, à cause de leur symétrie par rapport au diamètre, en une seule dirigée suivant ce diamètre ; et il est visible que pour la trouver, il ne s'agit que de déterminer l'attraction que chaque partie de la zône exerce sur le point S,

cette surface suivant des droites sensiblement parallèles et avec une force constante pour la même

---

puis construire sa composante suivant SO, et enfin ajouter toutes ces composantes.

Faisons d'abord cette opération pour la zône qui est renfermée entre les deux cercles qui se projettent suivant AA' et BB'; désignons par ε l'épaisseur de l'enveloppe sphérique.

La surface entière de la zône sera évidemment exprimée par la valeur suivante (π désignant le rapport du diamètre à la circonférence) :

$$\pi \times \overline{AA'} \times \overline{AB}$$

et son volume ou sa quantité de matière par

$$\pi \times \overline{AA'} \times \overline{AB} \times \varepsilon.$$

Soit n un très-grand nombro. Supposons qu'on ait divisé la zône en n parties égales, par autant de méridiens, ce qui est toujours possible : chaque partie sera très-petite et aura pour expression

$$\pi \times \frac{\varepsilon}{n} \times \overline{AA'} \times \overline{AB}$$

Maintenant chacune de ces parties pouvant, à cause de sa petitesse, être considérée comme une molécule élémentaire de l'enveloppe sphérique, attirera ce point S en raison directe de sa masse et inverse du carré de sa distance : cette dernière est évidemment la même pour chacune d'elles, et elle est égale à $\overline{AS}$, en sorte que l'attraction exercée sur S sera égale à

$$\pi . \frac{\varepsilon}{n} . \frac{\overline{AA'} \times \overline{AB}}{\overline{AS} \times \overline{AS}}$$

laquelle doit être prise dans le sens AS.

quantité de matière : en sorte qu'un point matériel qui se meut dans un espace peu étendu à

Si nous voulons maintenant avoir la composante de cette force suivant le diamètre SO, construisons le parallélogramme rectangle SDAE : la force précédente sera représentée par la diagonale AS, tandis que la composante suivant $\overline{SO}$ le sera par la droite SE, en sorte que cette dernière étant représentée par f et l'autre par p, on aura :

$$f : p :: \overline{ES} : \overline{AS}$$

ce qui donne

$$f = p \cdot \frac{\overline{ES}}{\overline{AS}}$$

et comme on a déjà

$$p = \pi \cdot \frac{\varepsilon}{n} \cdot \frac{\overline{AA'} \times \overline{AB}}{\overline{AS} \times \overline{AS}}$$

il en résulte pour la valeur de f

$$f = \pi \cdot \frac{\varepsilon}{n} \cdot \frac{\overline{AA'} \times \overline{AB} \times \overline{SE}}{\overline{AS} \times \overline{AS} \times \overline{AS}}$$

Or, il est visible que les n parties égales de la zône que nous avons considérée, donneront chacune une composante égale à f, en sorte que l'attraction totale produite par la zône sera représentée par n fois la valeur de f ou par la valeur suivante :

$$\pi . \varepsilon . \frac{\overline{AA'}}{\overline{AS}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} \cdot \frac{\overline{SE}}{\overline{AS}}$$

Maintenant il est visible aussi que l'attraction de la zône

la surface du globe, peut être rigoureusement considéré comme soumis à l'action d'une force dont

---

comprise entre les cercles dont les projections sont aa' et bb' sera représenté par

$$\pi.\ \varepsilon.\frac{\overline{aa'}}{\overline{aS}}\cdot\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}}\cdot\frac{\overline{Se}}{\overline{aS}}$$

en sorte que la différence de ces attractions sera égale à

$$\pi.\ \varepsilon.\left\{\frac{\overline{AA'}}{\overline{AS}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}\cdot\frac{\overline{SE}}{\overline{AS}}-\frac{\overline{aa'}}{\overline{aS}}\cdot\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}}\cdot\frac{\overline{eS}}{\overline{aS}}\right\}$$

Or, en considérant AB et ab, comme des droites, et en ayant égard aux triangles semblables ASB et aSb, ASE et aSe, ASA' et aSa', on a les trois proportions suivantes entre leurs côtés homologues :

$$\mathrm{AB}:\overline{\mathrm{AS}}::\overline{ab}:\overline{aS}$$
$$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{AS}}::\overline{aa'}:\overline{aS}$$
$$\overline{\mathrm{ES}}:\overline{\mathrm{AS}}::\overline{eS}:\overline{aS}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AS}}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}},\ \frac{\overline{\mathrm{AA'}}}{\overline{\mathrm{AS}}}=\frac{\overline{aa'}}{\overline{aS}},\ \frac{\overline{\mathrm{ES}}}{\overline{\mathrm{AS}}}=\frac{\overline{eS}}{\overline{aS}}$$

et conséquemment,

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}.\overline{\mathrm{AA'}}\cdot\overline{\mathrm{ES}}}{\overline{\mathrm{AS}}.\overline{\mathrm{AS}}.\mathrm{AS}}=\frac{\overline{ab}.\overline{aa'}.\overline{eS}}{\overline{aS}.\overline{aS}.\overline{aS}}$$

et par suite de cette dernière égalité :

la direction et l'intensité sont indépendantes de sa position. Mais il n'en est pas de même lorsque

$$\pi.\varepsilon.\left\{\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}.\frac{\overline{AA'}}{\overline{AS}}.\frac{\overline{ES}}{\overline{AS}}-\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}}.\frac{\overline{aa'}}{\overline{aS}}.\frac{\overline{eS}}{\overline{aS}}\right\}=o$$

d'où il suit, que la différence entre les attractions des deux zônes que nous avons considérées est nulle, ou, en d'autres termes, que ces attractions se détruisent réciproquement, en sorte que leur action totale sur le point S est nulle.

Si maintenant vous supposez qu'on ait fait varier le point A depuis l'extrémité H du diamètre So, jusqu'au G placé sur la corde SG perpendiculaire à ce diamètre, en l'arrêtant à des positions infiniment proches, on formera par-là une série de cônes droits passant par ces positions et soumis aux mêmes conditions que ceux dont nous venons de nous occuper, et on divisera la partie GHG' de la sphère en un certain nombre de zônes qui auront toutes leurs correspondantes dans la portion GH'G' de la même sphère; en sorte que comme tout ce que nous venons de dire est applicable à ces zônes, il sera facile d'en conclure que l'attraction totale exercée par la sphère sur le point S sera nulle, puisqu'elle se composera de la somme d'une série d'attractions partielles qui se détruisent deux à deux.

Ainsi donc : *tout point matériel, placé dans l'intérieur d'une enveloppe sphérique dont chaque point l'attire en raison directe de la masse et inverse du carré de sa distance, n'éprouve aucune action attractive de la part de cette enveloppe.*

Ce théorême aurait également lieu si au lieu d'une force attractive, on admettait dans les molécules une force répulsive, assujettie aux mêmes lois de distances et de masses.

ce point se trouve à une distance appréciable, comme celle de la lune, par exemple; alors si on

---

Supposons maintenant le point S en dehors de l'enveloppe sphérique, (fig. 4).

Menons comme précédemment le diamètre SO, puis concevons deux cônes très-proches l'un de l'autre, droits tous les deux et ayant pour axe le diamètre OS. Ces cônes intercepteront sur la sphère deux zônes ou bandes très-étroites, comme tout à l'heure, et attirant toutes deux le point S, mais pourtant avec cette différence que dans le cas actuel les deux actions s'ajouteront au lieu de se retrancher, comme tout à l'heure.

En répétant exactement les mêmes raisonnemens que précédemment, on trouvera pour l'attraction de la zône correspondante à l'arc AB :

$$2\,\pi.\,\varepsilon.\frac{\overline{AB}}{AS}.\frac{\overline{AE}}{AS}.\frac{\overline{SE}}{AS}$$

et pour celle de la zône correspondante à l'arc *ab* :

$$2\,\pi.\,\varepsilon.\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}}.\frac{\overline{ae}}{\overline{aS}}.\frac{\overline{Se}}{\overline{aS}}$$

ce qui donne pour l'attraction simultanée des deux zônes

$$2\,\pi.\,\varepsilon.\left\{\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}.\frac{\overline{AE}}{\overline{AS}}.\frac{\overline{SE}}{\overline{AS}}+\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}}.\frac{\overline{ae}}{\overline{aS}}.\frac{\overline{Se}}{\overline{aS}}\right\}$$

Mais on a évidemment par les mêmes triangles semblables que ceux dont nous avons déjà parlé, les trois équations :

le conçoit se mouvant dans l'espace suivant une ligne inclinée par rapport à un plan tangent à la

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}},\ \frac{\overline{AE}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{ae}}{\overline{aS}},\ \frac{\overline{SE}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{Se}}{\overline{aS}}$$

d'où l'on tire les trois suivantes :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{aS}}=\frac{\overline{AB}+\overline{ab}}{\overline{AS}+\overline{aS}}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{ae}}{\overline{aS}}=\frac{\overline{AE}+\overline{ae}}{\overline{AS}+\overline{aS}}$$

$$\frac{\overline{ES}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{eS}}{\overline{AS}}=\frac{\overline{ES}+\overline{eS}}{\overline{AS}+\overline{aS}}$$

d'où l'on tire pour la valeur de la force attractive

$$4\,\pi.\,\varepsilon.\left\{\frac{\overline{AB}+\overline{ab}}{\overline{AS}+\overline{aS}}\cdot\frac{\overline{AE}+\overline{ae}}{\overline{AS}+\overline{aS}}\cdot\frac{\overline{ES}+\overline{eS}}{\overline{AS}+\overline{aS}}\right\}$$

maintenant du centre O abaissons la perpendiculaire OI sur la droite Aa, I sera le milieu de Aa. Puis du point I menons une autre perpendiculaire IG sur Ee, G sera le milieu de Ee; enfin menons le rayon OA qui sera évidemment perpendiculaire au petit arc AB et les perpendiculaires bd et BD sur Aa. Nous aurons d'abord :

$$\overline{SA}+\overline{Sa}=2.\ \overline{SI}$$
$$\overline{SE}+\overline{Se}=2.\ \overline{SG}\cdot$$
$$\overline{AE}+\overline{ae}=2.\ \overline{GI}$$

surface du globe, et si l'on suppose ses mouvemens considérables, les diverses positions de ce point

---

et substituant ces valeurs dans l'expression de la force d'attraction exercée sur le point S, celle-ci devient

$$4\,\pi.\,\varepsilon.\left\{\frac{\overline{AB}+\overline{ab}}{\overline{SI}}\cdot\frac{\overline{GI}}{\overline{SI}}\cdot\frac{\overline{SG}}{\overline{SI}}\right\},\quad (M)$$

Or, il est visible maintenant que les deux triangles SIG, SIO sont semblables, ainsi l'on a entre leurs côtés homologues les relations suivantes :

$$\overline{GI} : \overline{SI} :: \overline{OI} : \overline{SO}.$$
$$\overline{SG} : \overline{SI} :: \overline{SI} : \overline{SO}.$$

d'où l'on tire en multipliant ces proportions l'une par l'autre

$$\overline{GI}\cdot\overline{SG} : \overline{SI}\cdot\overline{SI} :: \overline{OI}\cdot\overline{SI} : \overline{SO}\cdot\overline{SO}.$$

ce qui donne

$$\overline{GI}\cdot\overline{SG}\cdot\overline{SO} = \overline{OI}\cdot\overline{SI}^3$$

et

$$\frac{\overline{GI}\cdot\overline{SG}.}{\overline{SI}\cdot\overline{SI}\cdot\overline{SI}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{SO}^2}$$

substituant cette valeur dans l'expression (M) elle devient

$$4\,\pi.\,\varepsilon.\,\frac{\overline{AB}+\overline{ab}.\,\overline{OI}}{SO\quad \overline{SO}^2}$$

Mais maintenant si l'on observe que les triangles rectangles $\overline{ADB}$ et $\overline{IOA}$ sont semblables, on trouve la relation

influeront non-seulement sur l'intensité de la force qui attire ce point vers la surface ou plutôt vers

---

$$\overline{AB} : \overline{AD} :: \overline{AO} : \overline{OI}$$

d'où il vient

$$\overline{AB} \times \overline{OI} = \overline{AD} \times \overline{AO}$$

il est visible que l'on a aussi

$$ab \times OI = ad \times AO.$$

et en introduisant ces expressions dans la dernière expression obtenue pour la force d'attraction, on la réduit à la forme suivante :

$$\frac{\pi. \ \varepsilon.}{2} \cdot \frac{Ao}{\overline{SO}^2} \left\{ AD + ad \right\}$$

Or, les arcs AB et ab étant infiniment petits, les droites SD et SB sont parallèles, et ainsi, la somme des lignes AD et ad est égale à la différence entre les cordes Aa et Bb.

D'après cela (fig. 5), menons par le point S une tangente ST au cercle H H'H''.... qui représente le grand cercle de la sphère, dont nous nous sommes occupés, puis divisons l'arc ST' en une infinité de parties égales HH', H'H'', H'H'''..... auxquelles correspondront en menant les droites HS, H'S, H''S... etc., les parties hh', $h'h''$, $h''h'''$.... etc., désignons par C, C', C''..... les cordes correspondantes aux points H, H', H'',..... nous aurons pour les attractions exercées par chaque couples de zones correspondantes aux arcs HH' et hh', H'H'' et $h'h''$, H''H''' et $h''h'''$.... etc., les expressions suivantes :

le centre de la terre, mais aussi sur sa direction.

Nous en avons encore un exemple que vous

$$\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2} \times \cdot \frac{AO}{SO^2} \cdot \left\{ C - C' \right\}$$

$$\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{AO}{SO^2} \cdot \left\{ C' - C'' \right\}$$

$$\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{AO}{SO^2} \cdot \left\{ C'' - C''' \right\}$$

$$\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{AO}{SO^2} \cdot \left\{ C''' - C^{IV} \right\}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\pi \cdot \varepsilon}{2} \cdot \frac{AO}{SO^2} \cdot \left\{ C^n - o \right\}$$

Puisque la dernière corde est nulle à cause que les deux bouts se confondent avec le point de contact T, en ajoutant ensemble toutes ces valeurs, on trouve pour leur forme :

$$4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{\overline{AO}.}{SO^2.} \; C.$$

Mais il est visible que C étant un diamètre, est égal à deux fois AO, ainsi cette expression devient

$$4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{\overline{AO}^2.}{SO^2.}$$

Or, $4\,\pi.\,AO^2$ est l'expression de quatre fois la surface du

saisirez mieux sans doute dans la bièle et la manivelle du volant d'une machine à vapeur : en

---

cercle HH'H''.... ou en d'autres termes celle de la surface de l'enveloppe sphérique elle-même, tandis que $4\pi.\varepsilon$ est son volume. Ainsi donc, en désignant celui-ci par V, on trouve pour l'expression de l'attraction exercée sur le point S par cette enveloppe.

$$\frac{V}{SO^2}.$$

Ainsi, *une molécule quelconque, placée en dehors d'une enveloppe sphérique, infiniment mince, est attirée par cette enveloppe, en raison directe de sa masse, et inverse du carré de la distance de son centre à la molécule attirée.*

La même chose aurait lieu dans le cas où les molécules de l'enveloppe, au lieu d'attirer la molécule S, la repousseroient en suivant les mêmes lois de relation entre les masses et les distances.

Supposons à présent la molécule S en présence d'une sphère attractive ou répulsive dont le centre soit à une distance D de la molécule. Nous pouvons concevoir la sphère comme divisée en un grand nombre d'enveloppes sphériques dont les centres seront celui de la sphère, et dont les volumes seraient V, V', V'', V'''..... L'attraction ou la répulsion de la sphère entière sera égale à la somme des attractions ou des répulsions partielles et par conséquent sera représentée par $\frac{V}{SO^2}+\frac{V'}{SO^2}+\frac{V''}{SO^2}$......

ou par $(V+V'+V''.......)\frac{1}{SO^2}$ mais $V+V'+V''$..... est évidemment le volume V de la sphère entière, ainsi, *l'attraction ou la répulsion exercée par cette sphère est*

vertu de l'obliquité plus ou moins considérable de la manivelle par rapport à la bièle, et des varia-

---

en raison directe de son volume et inverse du carré de la distance de son centre à la molécule attirée.

Supposez à présent une sphère dans laquelle soit placée la molécule S au lieu d'être absolument en dehors. Décomposons cette spère en plusieurs enveloppes infiniment minces comme nous venons de le faire : d'après ce qui a été démontré plus haut, aucune des enveloppes extérieures à la molécule S n'exercera d'action attractive sur cette molécule; mais elle sera attirée par l'ensemble des enveloppes, par rapport auxquelles elle est extérieurieurement située. En sorte que si on conçoit dans la première sphère une autre sphère qui lui soit concentrique et qui passe par la molécule S, celle-ci seule exercera sa force répulsive ou attractive sur la molécule S, tandis que tout le reste n'influera en rien sur cette molécule.

Ce beau résultat est de la plus haute importance dans les sciences physiques et astronomiques, et cependant on voit combien il s'obtient facilement par des méthodes presqu'élémentaires; car malgré la supposition implicite de relations entre des quantités finies et infiniment petites, je puis d'autant mieux conserver le nom d'élémentaires aux démonstrations que l'on vient de voir, qu'elles ont été saisies de suite par des hommes d'une intelligence bien ordinaire.

Il est facile de déduire delà un autre théorême intéressant. *Si deux sphères pleines sont en présence, et que leurs molécules s'attirent ou se repoussent réciproquement en raison inverse du carré de leurs distances et directe de leurs masses, l'attraction ou la répulsion des deux spères se trouvera proportionnelle à la somme de leurs*

tions dans la tension de la vapeur pendant la durée d'une course du piston, la force qui tire la tête de

---

masses, et en raison inverse du carré de la distance de leurs centres.

En sorte que, la loi qui lie les infiniment petits de l'espace, ne change pas en passant aux corps semblables d'une grandeur finie. Quand il n'y aurait que cette raison pour prouver que la loi qui règle l'attraction et la répulsion des molécules est celle que nous avons admise en commençant cette note, elle suffirait pour lui donner le plus grand caractère de certitude : et en effet, rien ne paraît plus conforme à la manière d'être d'une essence devant laquelle il n'y a aucune grandeur, que ces lois uniformes, en vertu desquelles les atômes et l'univers réagissent les uns sur les autres de la même manière. C'est là qu'est la véritable économie de moyens que tant d'hommes veulent trouver en limitant le nombre des élémens primitifs qui composent l'univers. Que sont en effet par rapport à la puissance créatrice de l'Eternel, quelques élémens de plus ou de moins? Ce qui semble plus digne de lui, c'est la simplicité dans les lois qui les régissent; c'est, quand on voit toutes ces richesses de la nature, toutes ces productions si variées, dont la mémoire de l'homme ne peut recevoir qu'une empreinte imparfaite, et dont la vie des générations entières ne saurait ni concevoir les détails ni embrasser l'ensemble, c'est quand on compare l'immensité des mondes, la régularité de leur marche, l'harmonie de leurs rapports, et qu'on ne découvre au milieu de tout cela qu'un petit nombre de lois régulières, mais suffisantes pour tout expliquer, c'est alors qu'on conçoit la part infinie de la volonté de l'Être-Suprême dans cet admirable ouvrage, et qu'on se sent saisi de ce sentiment profond et religieux, si vivement perçu par Newton, Leibnitz et Pascal.

la manivelle varie à chaque instant de direction et d'intensité.

Dans la leçon précédente je vous ai cité un autre exemple de la variation des forces qui agissent sur un système, en vous disant quelques mots de ce qui se passe dans le mouvement des chaînes qui servent à extraire le minérai.

Ainsi, vous voyez que pour traiter la question d'équilibre sous un point de vue général, il faut considérer les forces comme susceptibles de varier de grandeur et de direction en supposant un mouvement dans les points d'application : et il est évident que les conséquences obtenues dans cette hypothèse seront applicables aux cas où l'une ou l'autre de ces variations ou toutes les deux n'auraient pas lieu.

Heureusement, cette considération à laquelle il est indispensable d'avoir égard dans les théorêmes et les problêmes de mouvement, peut s'éluder dans ceux qui sont relatifs à l'équilibre, par un artifice très-simple et qui ne porte aucune atteinte à la rigueur des démonstrations.

En effet, il importe peu pour l'état d'équilibre

Plus tard, nous reviendrons sur les conséquences de ce que nous venons de démontrer, et nous essayerons d'en déduire quelques notions précises sur la manière d'être de quelques fluides, comme le calorique, la lumière, etc. Ces notions sont du domaine de la mécanique, et le rôle que le calorique joue dans la puissance motrice de la vapeur rend indispensables quelques recherches à ce sujet.

de connaître ceux qui en sont très-différens, ou même ceux qui en diffèrent d'une manière finie et déterminée quoique assez proche : on voit que tout état tel que ceux-là ne doit avoir aucune relation avec l'équilibre dans une position déterminée : ainsi, par exemple, pour concevoir l'équilibre d'une sphère sur une surface *abc* (fig. 2) et elle touche en AC, et pour trouver les relations entre les forces P et Q, qui doivent la tenir en équilibre, il n'est évidemment pas nécessaire d'avoir égard à ce qui arriverait à ce système pour une autre position S′ sur la surface ; car on sent qu'il n'y a rien de commun entre ces deux choses : mais puisque, comme nous l'avons déjà observé, il est pourtant indispensable d'introduire les considérations de mouvement dans les recherches sur l'équilibre, il suffira d'observer l'état du système dans des positions extrêmement rapprochées, en sorte que les points d'application des forces varieront très-peu, et par suite aussi, on pourra considérer les variations de direction et d'intensité des forces comme nulles.

Cette manière de voir devient d'autant plus rigoureuse et exacte, que l'hypothèse du mouvement ne peut avoir pour but que de connaître les causes qui le favorisent ou le combattent, mais qu'en dernière analyse ses conséquences ne doivent s'appliquer qu'à un état absolu, qui est celui de l'équilibre, état dans lequel les forces ont une manière d'être déterminée, et qu'on peut considérer comme

la limite des divers états de mouvement très-proches de celui-là; ainsi toutes les traces de variations doivent y disparaître pour arriver à une conclusion exacte.

On peut donc considérer pour les recherches relatives à l'équilibre toutes les forces comme invariables de direction et d'intensité, pourvu qu'on ne suppose au corps que des positions possibles, très-proches l'une de l'autre et de la situation pour laquelle on veut chercher les conditions d'équilibre. Nous allons voir maintenant de quelle manière on peut faire usage de ces positions très-proches de l'état d'équilibre, en représentant tout le système des forces qui agissent sur un corps quelconque, par une seule force appliquée à l'extrémité d'un cordon flexible et inextensible, passant sur plusieurs poulies, et fixé par une de ses extrémités à un point invariable de position.

Soit d'abord un point quelconque A (fig. 6) sur lequel vous voulez, au moyen d'une poulie, exercer une traction ou force donnée F dans une direction également donnée AF, par la tension t d'un cordon dont un bout serait fixé quelque part arbitrairement, et dont l'autre bout serait sollicité par la force qui produit la tension t, dans une direction également arbitraire. Pour cela supposons que par A nous ayons fait passer l'axe d'une poulie perpendiculaire à la direction AF, puis prenons sur cette dernière ligne une longueur AF

représentant la force F; élevons sur le milieu de AF la perpendiculaire BB, puis du point A comme centre, décrivons l'arc BOB dont le rayon soit proportionnel à la tension *t*, et enfin menons les droites AB, AB : il est clair que si ces droites représentent les deux côtés d'un parallélogramme, AF en sera la diagonale, ainsi on aura les directions qu'il faut donner aux deux parties du cordon pour que leur résultante soit égale à F en grandeur et en direction. Si donc on mène deux tangentes à la circonférence de la poulie parallèlement à AB et AB, on aura précisément la position des cordons qui doivent embrasser la poulie pour produire un point A avec la tension *t*, la puissance F donnée de grandeur et de direction.

Il ne s'agit maintenant que de savoir comment on peut, au moyen de poulies de renvoi, changer la direction d'un cordon dans un autre donnée. Pour cela supposons deux directions données A et B dans l'espace : prenons sur l'une d'elles un point quelconque *a*, et sur l'autre un point également arbitraire *b*; menons ensuite la droite *ab*. On conçoit aisément un cercle tangent aux droites A et *ab*, et un autre aux droites B, et *ab*. Si l'on suppose alors que chacun de ces cercles représente la partie intérieure de la gorge d'une poulie, à chacun d'eux correspondra cette poulie et un fil flexible qui, ayant d'abord la direction A, passerait sur la première de ces poulies, pourra alors

prendre la direction intermédiaire *ab* pour passer sur la seconde, qui lui permettra ensuite de prendre la direction donnée B. Vous voyez donc comment, au moyen de deux poulies de renvoi, on peut changer la direction d'un cordon tendu en toute autre direction qu'on voudra.

3. D'après cela soit un corps ou système de corps, variable ou invariable de forme, soumis à des forces susceptibles ou non de changer de direction ou d'intensité, par suite des mouvemens de leur point d'applications; on pourra, quel que soit le nombre de ces forces et la situation de leurs points d'application, les représenter au moyen d'un seul cordon tendu par une force *t* fixé à l'un de ses bouts et passant, au moyen de poulies de renvoi, sur diverses poulies dont les axes, perpendiculaires aux diverses directions de ces forces, passeraient en outre par leurs points d'application.

Maintenant imaginons que le système ait pris un mouvement quelconque; il est évident que ce mouvement aura pour un de ses résultats de changer la position des poulies attachées au système, en sorte que par là le bout libre du cordon tendu par la force *t*, avancera dans le sens de la force *t* ou reculera dans le sens contraire, ou enfin pourra rester immobile : voyons à quoi repondent ces trois cas.

Or, le premier pourra être considéré comme produit par la force *t*, mais les deux autres ne pourront l'être que comme le résultat d'une autre

action ; car il est absurde de supposer qu'une force quelconque seule puisse produire un effet tel que son point d'application marche dans un sens opposé à sa direction d'action.

Il est donc visible que tout mouvement qui laissera le bout du cordon immobile, ou le fera marcher à l'envers de l'action de la force qui la tend ne pourra être produit par cette force.

Mais si l'on a représenté toutes les forces du système par ce cordon unique, il n'y a visiblement plus d'autre cause de mouvement dans le système, donc un mouvement qui produirait l'un de ces deux effets est absurde à supposer.

Ainsi donc si la constitution du système est telle qu'il ne puisse prendre aucun mouvement qui ne produise un de ces deux effets, il doit être en équilibre, car toute hypothèse de déplacement dû à la tension du cordon unique serait une absurdité.

Voilà donc un caractère général pour reconnaître l'équilibre d'un système quelconque : il est clair d'ailleurs, d'après ce que nous avons dit, que pour examiner si cette condition est remplie, il suffit et même il est nécessaire de ne considérer parmi les positions que le système peut prendre, que celles qui sont infiniment proches de celle qu'on considère d'abord pour pouvoir écarter du problème la complication due à la variation possible des forces du système.

4. Nous avons déjà vu dans une de nos premières

leçons un exemple très-élémentaire de cette manière de raisonner, en traitant de l'équilibre de trois forces parallèles. Il nous serait facile d'en trouver d'autres, mais ils ne pourraient guères vous être utiles dans l'état où nous venons de présenter le moyen précédent de vérifier l'équilibre : nous allons tâcher de lui donner une forme plus mathématique, et sous laquelle il nous sera plus facile de l'employer.

5. Pour plus de facilité, supposons que toutes nos poulies, soit de renvoi, soit autres, soient assez petites pour se confondre avec les points par lesquels passe leur axe : alors le fil passera par tous ces points, et ses divers replis ne formeront aucune courbure.

Supposons maintenant que A (fig. 7) soit un des points d'un système soumis à l'action de plusieurs forces, représentées par un cordon unique, avec la condition précédente que ces poulies soient infiniment petites : soient E et F les deux poulies de renvoi par lesquelles passe le cordon avant de s'enrouler sur la poulie A. Il est visible que le point A pourra être regardé comme sollicité par une force P, résultante de la tension t des deux cordons AE et AF, et dont la direction coupera en deux parties égales l'angle EAF.

Admettons ensuite que le système tout entier ait reçu un petit mouvement, pendant lequel le point A sera venu se placer en A′. Par A′, menons les

droites A'E et A'F, elles représenteront la position nouvelle du cordon, puis menons la droite A'B'B perpendiculaire à AB, et enfin, construisons le parallélogramme isoscèle ABCB' dont le point C tombera évidemment sur la direction de la force P. D'abord on aura entre la force P et la tension t, la relation suivante :

$$P : t :: AC : AB :: 2\,AD : AB.$$

d'où l'on tire

$$2\,AD = \frac{P}{t} \times AB.$$

Maintenant si l'on abaisse A'H' et A'H perpendiculaire sur AB' et AB, les cordons AE et A'E, AF et A'F, étant infiniment près d'être parallèles deux à deux, à cause du trajet infiniment petit AA', on pourra considérer AH comme égal à AE — A'E et AH' comme égal à AF — A'F, en sorte que AH + AH' sera la quantité dont le cordon EAF se sera raccourci pour prendre la position EA'F, et par conséquent la quantité dont le point d'application t aura pu avancer dans le sens de l'action de la force qui produit cette tension.

Maintenant les triangles semblables ABD et A'BH donnent évidemment la proportion suivante :

$$BH : A'H :: BD : AD.$$

et par suite

$$BH = A'H \times \frac{BD.}{AD.}$$

d'où l'on tire

$$AH = AB - BH = AB - A'H \times \frac{BD}{AD}.$$

Il est évident qu'on a aussi

$$AH' = AB - BH' = AB - A'H' \times \frac{BD}{AD}.$$

d'après cela, il est facile d'en déduire

$$AH \times AB = \overline{AB}^2 - \frac{BD}{AD} \cdot AB \cdot A'H.$$

et

$$AH' \times AB = \overline{AB}^2 - \frac{BD}{AD} \cdot AB \cdot A'H'.$$

En sommant ces deux équations on trouve

$$(AH + AH') \times AB = 2AB^2 - \frac{BD}{AD} \cdot \{AB . A'H + AB . A'H'.\}$$

où l'expression $AB \times A'H + AB \times A'H'$ est visiblement l'expression de deux fois la surface du triangle ABB', laquelle peut être aussi représentée par $AD \times BD$, en sorte qu'on aura

$$AB \times AH' + AB. \times A'H' = 2. AD \times BD.$$

ce qui change l'équation précédente en celle-ci :

$$(AH + AH')AB = 2\overline{AB}^2 - 2\frac{BD}{AD} . AD \times BD = 2(AB^2 - \overline{BD}^2) = 2\overline{AD}^2.$$

et par conséquent nous donne

$$AH + AH' = 2. \frac{\overline{AD}^2}{AB.} = 2. AD. \frac{AD}{AB}$$

Mais si vous vous rappelez que l'on a

$$2AD = \frac{P}{t} AB.$$

Vous verrez facilement que cela se réduit à

$$AH + A'H' = \frac{P}{t} . AD.$$

C'est-à-dire, *que si l'on projette le chemin parcouru par le point d'application de la force* P*, sur la direction de cette force, la quantité dont ce mouvement aura permis au cordon de s'allonger en dehors des points* E *et* F*, sera égale à cette projection multipliée par la force* P *et divisée par la tension du cordon.*

Il est à observer que si le chemin parcouru par le point A, au lieu d'être effectué dans le sens de l'action de la résultante des tensions du cordon EAF, l'avait été dans un sens contraire, le cordon se serait raccourci en dedans des points E et F, en sorte que son allongement aurait été négatif : pour obtenir ce résultat, il faudrait donc admettre que $\frac{P}{t} \times AD$ fût négatif, ce qui exige que AD soit alors négatif : ainsi quand la projection de l'espace parcouru sur la force sera mesuré dans le sens opposé à la direction d'action de la force, il faudra considérer cette projection comme affectée du signe —, qui indique qu'elle devra être retranchée, ainsi que tous ses multiples, des quantités avec lesquelles elle devrait s'ajouter dans l'hypothèse contraire.

Tout cela posé, voyons quel sera l'allongement total du cordon, ou en d'autres termes quelle sera

la quantité dont la force t aura avancé dans le sens de son action, par suite du mouvement hypothétique dont nous avons parlé : pour cela désignons comme tantôt par P, P′, P″.... etc. les résultantes de la tension du cordon aux divers points du système, par p, p', p'', ... Les projections sur ces forces des espaces parcourus par leurs points d'application dans le petit mouvement imprimé, il est visible que l'allongement total du cordon du côté du point d'application de la force qui produit la tension t, sera la somme de tous les allongemens partiels, obtenus dans ce mouvement

ou $$\mathrm{P}.p + \mathrm{P}'.p' + \mathrm{P}''.\,p''........$$

en ayant soin de prendre comme positives celles des quantités p, p', p''.... qui seront mesurées dans le sens de l'action des forces P, P, P″...... et de prendre les autres comme négatives.

D'après cela il est clair que si la somme des quantités Pp, P′p,.... est nulle ou négative le mouvement n'aura pu être le résultat de l'action du cordon et par conséquent non plus de celle des forces qu'il représente, car comme nous l'avons dit (3) il serait absurde d'imaginer que la force qui produit la tension du cordon, en tirant un de ses points pût faire marcher ce point en sens contraire de son action, ou le laisser immobile ; le mouvement dont nous avons parlé est donc impossible sans admettre des forces propres et inhérentes au

système, ce qui n'entre pas dans notre hypothèse.

Or, si tous les mouvemens que l'on peut imaginer avoir lieu dans le système produisent le même résultat, c'est-à-dire, s'ils rendent nulle ou négative la quantité $P.p + P'.p' + P''.p''$......, il faudra également reconnaître qu'ils ne peuvent avoir lieu en vertu des forces P, P', P''..... Ainsi le corps ne pourra se mouvoir d'aucune manière, et il sera en équilibre.

Donc : pour savoir si un corps ou un système de corps est en équilibre en vertu de l'action d'un nombre quelconque de forces agissant sur quelques-uns de ses points, faites prendre à ce corps tous les mouvemens infiniment petits qui conviennent à sa constitution, projetez sur les forces les espaces parcourus par leurs points d'application, en prenant comme positives celles de ces projections prises dans le sens des forces, et les autres comme négatives; multipliez chaque force par la projection correspondante, donnez à ce produit le même signe qu'à la projection, et si la somme de ces produits est nulle ou négative pour toutes les hypothèses de mouvement, l'équilibre aura lieu.

Il est visible que l'équilibre au contraire n'aura pas lieu si pour un seul de ces mouvemens la quantité $Pp + P'p' + P''p''$ peut être positive, et s'il y en a plusieurs dans ce cas, on sent que le mouvement que prendra le corps correspondra à

celui des changemens d'état qui donnera la plus grande valeur possible à $Pp + P'p' + P''p''$.....

Ce principe que nous venons de développer, est connu sous le nom de principe de vitesses virtuelles : sa découverte est due à Galilée, l'un de ces hommes illustres, nés pour éclairer le monde et pour servir de victime au fanastime et à l'ignorance. Il fut d'abord vu par lui sous un autre jour, puis développé par ses successeurs et enfin par Lagrange qui le donna sous la forme et presqu'avec la même démonstration que je viens de vous faire connaître.

Les espaces p, p', p''..... sont nommés *vitesses virtuelles*, parce qu'elles sont censées représenter l'effet obtenu par chaque force, en vertu de son action combinée avec celle du système en général.

Ce principe vous paraîtra sans doute au premier aspect bien obscur et compliqué, et ce qui semble surtout difficile, c'est de trouver le moyen de le mettre en pratique.

Du reste, il vous est facile de sentir que la nature du système n'altère en rien sa généralité ; aussi est-il propre à trouver l'équilibre des corps solides comme des corps liquides ; des points isolés comme des systèmes les plus compliqués de solides réagissans les uns sur les autres : et c'est cette généralité qui en fait un moyen si précieux de solution des problèmes mécaniques et surtout le rend si propre à traiter de l'équilibre des machines

pour lesquelles il fournit les procédés les plus simples et les plus courts pour évaluer les relations entre les forces qui tendent à faire mouvoir ces machines ou les tenir en repos par leur destruction réciproque.

Quant à l'application, il ne faut pas la croire en général fort mal-aisée : pour les corps solides surtout elle se réduit à un petit nombre de formules ou de raisonnemens fort simples, et qu'un peu d'habitude fait aisément trouver en cas de besoin.

Pour vous familiariser avec ces applications, je vais ici vous donner quelques exemples :

6. Cherchons l'équilibre de trois forces P, Q, R appliquées sur un point matériel unique M, et employons pour cela le principe ci-dessus. (Planche 9 fig. 1.)

Supposons que le point M ait pris un petit mouvement, et soit venu se placer en M' : abaissons du point M' des perpendiculaires sur les droites MP, MQ, et MR, puis par le point M, menons la droite AB perpendiculaire aussi à MR, nous aurons un triangle ABM' dont les trois côtés seront perpendiculaires à trois droites fixes, et par conséquent qui sera semblable à tout autre triangle *abc* qui jouirait de la même propriété.

Maintenant observons que les droites MP', MQ', MR' sont les projections du mouvement décrit MM' sur les forces P, Q, R : en sorte que si on désigne par *p*, *q* et *r*, les vitesses virtuelles du point M

par rapport aux forces P, Q, R, on aura

$$p = MP', \; q = MQ' \text{ et } r = -MR'.$$

Or, pour que l'équilibre ait lieu entre les trois forces P, Q, R, il faut, d'après ce que nous venons de dire, que l'on ait pour toutes les positions possibles qu'on voudrait donner au point M

$$P.p + Q.q + R.r = 0$$

ce qui revient à écrire

$$P \times MP' + Q \times MQ' - R \times MR' = 0$$

à cause de $MP' = p$, $MQ' = q$, et $MR' = r$.

Maintenant si l'on considère les trois triangles AMM', BMM' et ABM', et si l'on observe que MP' est la hauteur du premier, MQ' celle du second et MR' celle du troisième, on aura pour les surfaces de ces trois triangles les expressions suivantes :

$$ABM' = \tfrac{1}{2}.\, AB \times MR'$$

$$AMM' = \tfrac{1}{2}.\, AM, \times MP'$$

$$BMM' = \tfrac{1}{2}.\, BM' \times MQ'.$$

D'une autre part il est visible que la somme des deux triangles AMM' et BMM' est égale à la superficie du triangle ABM', ainsi l'on a :

$$ABM' = AMM, + BMM'$$

et par conséquent

$$AB \times MR' = AM' \times MP' + BM' \times MQ'. \quad (1).$$

Or, nous avons vu tout à l'heure que l'on avait

$$P \times MP' + Q \times MQ' - R \times MR' = o,$$

cela revient évidemment à

$$R \times MR' = P \times MP' + Q \times MQ'. \quad (2)$$

et divisant les deux membres de l'équation (1) par AB, et l'autre (2) par R, on obtiendra à la place de ces deux équations, les deux suivantes ;

$$MR' = \frac{AM'}{AB} \times MR' + \frac{BM'}{AB} \times MQ'.$$

et $$MR' = \frac{P}{R} \times MP' + \frac{Q}{R} \times MQ'.$$

Les deux premiers membres de cette équation étant les mêmes, les deux seconds membres doivent être égaux, ainsi l'on doit avoir

$$\frac{AM'}{AB} \times MP' + \frac{BM'}{AB} \times MQ' = \frac{P}{R} + MP' + \frac{Q}{R} \times MQ'$$

Cette dernière équation équivaut à celle-ci :

$$\left(\frac{AM'}{AB} - \frac{P}{R}\right) \times MP' + \left(\frac{BM'}{AB} - \frac{Q}{R}\right) \times MQ' = o.$$

Or, en vertu de la similitude des triangles ABM' et *abc*, on a :

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{bc}{ab} \ (3) \text{ et } \frac{BM'}{AB} = \frac{ac.}{ab.} \quad (4).$$

En mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve à sa place

$$\left(\frac{bc.}{ab} - \frac{P}{R}\right) \times MP' + \left(\frac{ac}{ab} - \frac{Q}{R}\right) \times MQ' = o.$$

Dans cette condition il n'y a plus d'arbitraires que MQ′ et MP′, puisque le triangle *abc* est invariable; mais en revanche MP′ et MQ′ peuvent prendre une infinité de valeurs, par les variations du point M′, et pour toutes l'équation doit être satisfaite.

Or, il est facile de voir que l'on peut prendre parmi ces variations de M′ une infinité de positions pour lesquelles P′M, par exemple, soit nul, sans que pour cela MQ′ le soit; dans ce cas il faudra donc que l'on ait

$$\left(\frac{ac}{ab} - \frac{Q}{R}\right) \times MQ = o,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant

$$\frac{ac}{ab} = \frac{Q}{R.}$$

on démontrerait de même que l'on doit avoir

$$\frac{bc}{ab} = \frac{P}{R.}$$

Ainsi pour le cas particulier que nous examinons, voilà deux équations qui doivent être nécessairement résolues : voyons si elles satisfont à l'équation de condition (2).

Pour cela rappelons-nous les équations (3) et (4), elles nous donneront

$$\frac{P}{R} = \frac{AM'}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{R} = \frac{BM'}{AB.}$$

d'où l'on tire

$$P = R. \frac{AM'}{AB}$$

$$Q = R. \frac{BM'}{AB.}$$

Mettant ces valeurs à la place de Q et de P dans l'équation (1) on trouve

$$R \times MR' = R. \frac{AM'}{AB}. MP' + R. \frac{BM'}{AB}. MQ'.$$

Puis divisant par R et multipliant par AB il vient

$$AB \times MR' = AM' \times MP' + BM' \times MQ'$$

Equation qui n'est autre chose que l'équation (1) laquelle est vraie puisque elle dérive d'une considération de géométrie indépendante de la mécanique. Ainsi donc les rapports obtenus pour $\frac{P}{Q}$ et $\frac{Q}{R}$ satisfont à l'équation de condition et donnent l'équilibre.

Si nous voulons exprimer le théorême indiqué par ces rapports, observons qu'on en tire

$$\frac{P}{bc} = \frac{R}{ab} \text{ et } \frac{Q}{ac} = \frac{R}{ab.}$$

ou $$\frac{P}{bc} = \frac{Q}{ac} = \frac{R}{ba}.$$

Ce qui veut dire que chaque force doit être

proportionnelle à celui des côtés du triangle *abc* auquel elle est perpendiculaire.

Ainsi : *pour que trois forces soient en équilibre autour d'un point, il faut qu'en construisant un triangle dont les trois côtés soient perpendiculaires aux trois forces, chacun de ces côtés représente la force à laquelle il est perpendiculaire.*

Il ne vous sera pas difficile de trouver par la même méthode le théorème analogue, relatif à l'équilibre de quatre forces agissant dans l'espace sur un même point : je me contenterai de vous énoncer ici ce théorème :

Si quatre forces sont données en direction, et qu'on mène quatre plans respectivement perpendiculaires à chacune d'elles, on formera un tétraèdre ; et pour que l'équilibre ait lieu entre ces quatre forces, il faudra que chacune d'elles soit représentée par celle des faces du tétraèdre à laquelle elle est perpendiculaire.

Je n'ai pas cherché dans ce qui précède à établir l'équilibre en cherchant à rendre négative la somme $Pp + Qq + Rr$; en effet il est facile de voir que si pour une position de M′ j'avais eu l'inégalité

$$P \times MP' + Q \times MQ' - R \times MR' < o,$$

en prenant sur le prolongement de MM′ le point M″ à la même distance de M que M′ le produit $Pp + Qq + Rr$ serait devenu alors

$$P \times MP'' + Q \times MQ'' - R \times MR''$$

ou $$-P \times MP' - Q \times MQ' + R \times MR'$$

quantité qui serait alors évidemment positive; ainsi pour cette position l'équation de condition ne serait pas remplie et l'équilibre n'aurait pas lieu : le cas que nous venons de traiter est donc un de ceux dans lesquels on doit absolument établir la condition $Pp + P'p' + P''p'' .... = 0$.

7. Voici un autre exemple dans lequel on peut employer la condition $P.p + P'.p' ...... = 0$ ou < 0.

Soit une force P, (Planche 9, fig. 2) poussant un point contre un plan BB′ immobile et au travers duquel il ne peut passer : cherchons la grandeur et la direction qu'il faut donner à la force P pour qu'il y ait équilibre.

D'abord il est évident que la force doit pousser dans le sens AM, c'est-à-dire du dehors au dedans du plan, sans quoi elle entraînerait avec elle le point M dans l'espace.

Supposons ensuite, pour nous conformer à ce que nous avons dit plus haut, que le point M prenne un petit mouvement, et menons par sa position primitive la droite NN′ perpendiculaire à la force P.

Il est visible que pour toutes les positions M′ que pourra prendre le point M dans l'angle NMB′, la projection p sera prise en sens contraire de P et ainsi on aura pour ces positions. :

$$P . p < 0.$$

sur la droite MN on aura $P . p = 0$.

Mais dans l'angle NMB, ce sera différent, et pour

toutes les positions M″ prises dans cet angle, on voit que la projection p sera de même signe que P, et par conséquent on aura toujours

$$P.p > 0.$$

Ainsi tant que l'angle NMB existera, l'équilibre ne pourra avoir lieu; mais s'il est nul, alors pour tous les points où l'on pourrait placer le point M on aurait $P.p' = 0$ ou < 0 et l'équilibre serait établi.

Or si l'angle NMB est nul, la droite PM est perpendiculaire au plan. Ainsi pour que l'équilibre ait lieu en vertu de l'action d'une force qui presse un point matériel contre un plan, il faut que cette force soit perpendiculaire au plan : quant à sa valeur elle est arbitraire, puisque la condition $P.p = 0$ ou < 0, sera remplie quelle que soit la valeur de P.

Vous voyez donc qu'avec un peu d'attention on parvient facilement à éluder ce grand nombre de conditions qu'on croirait au premier aspect impossible à satisfaire : du reste il me suffit ici d'avoir démontré les moyens d'appliquer le principe et de vous avoir fait connaître le principe lui-même : je n'insisterai pas davantage pour le moment sur une théorie qui, quoique simple en elle-même, doit vous paraître assez compliquée, et nous passerons de suite à une conséquence simple et féconde qu'on peut en tirer et qui renferme l'équilibre

général de toutes les machines qui sont soumises à deux forces qui tendent à réagir l'une sur l'autre.

8. Une machine n'est autre chose qu'un corps ou système de corps, au moyen desquels deux ou plusieurs forces se transmettent leur tendance d'action, de manière à ce que le mouvement du point d'application de l'une d'elles ne puisse se faire sans entraîner le mouvement des points d'application des autres forces, et cela dans des directions et des vitesses dépendantes de la nature du système, ou, en d'autres termes, de la disposition de la machine.

C'est ainsi, par exemple, qu'un plan incliné est une machine; qu'une balance, un levier, etc. sont des machines: et en effet vous voyez dans ces appareils au moins deux forces qui réagissent l'une sur l'autre, et tendent réciproquement à entraîner chacune le point d'application de l'autre suivant une direction opposée à l'action de cette dernière.

Presque toujours les machines sont destinées à transmettre l'action d'un moteur quelconque à un système de points auxquels est attachée une résistance, ou force qui s'oppose au mouvement qu'on voudrait imprimer à ce système: quelquefois aussi les machines servent seulement à conserver l'équilibre, mais ce cas est moins fréquent: cependant nous devons le traiter le premier, car il

nous aide à traiter ensuite l'autre ; en voici la raison :

Supposez une force P qui agit au moyen d'une machine sur la force Q appliquée comme P en un point quelconque de cette machine. Si l'équilibre a lieu, il n'y aura pas de mouvement, et dans ce cas il existera entre P et Q une certaine relation ou rapport que nous indiquerons ainsi :

$$P = m.Q$$

m étant une valeur qui dépend de la machine.

Supposons maintenant qu'à la place de la force Q, on place une force plus grande, il est visible que l'équilibre sera rompu, et le mouvement aura lieu de manière à faire marcher le point d'application de la force Q dans le sens de cette force; si au contraire, au lieu de Q, nous mettons une force plus petite, le mouvement aura encore lieu, mais en sens contraire de celui dont nous venons de parler. Il résulte de là que dans le premier cas le mouvement sera dû à la force Q, et dans le second à la force P.

Donc *cette dernière ne peut produire de mouvement dans la machine qu'autant qu'elle agira sur une force* Q' *plus petite que celle* Q *à laquelle elle pourrait faire équilibre au moyen de la machine.*

Et encore faut-il déduire de l'action effective de la force P toutes les pertes d'intensité produites par les résistances inertes qu'elle doit vaincre et qui sont en pure perte pour l'effet de la machine.

Cette observation donne de suite la mesure de la résistance qu'on peut mettre en mouvement au moyen d'une machine quelconque, et, combinée avec le principe des vitesses virtuelles, nous donne le moyen d'arriver à un résultat de la plus haute importance dans la mécanique, et qui, trop ignoré des artistes mécaniciens et des hommes à projets, a fait naître une foule de recherches inutiles et ruineuses pour ceux qui les ont entreprises.

Pour le reconnaître, cherchons d'abord les conditions d'équilibre des forces P et Q au moyen de la machine :

La première condition, c'est que le point d'application de la force P ne peut se mouvoir sans communiquer un mouvement au point d'application de la force Q. Supposons donc que le premier parcoure par un petit mouvement de la machine un espace p, le second parcourra en même temps un espace q : pour que l'équilibre ait lieu, il faudra, d'après ce que nous connaissons, que l'on ait

$$P.p + Q.q = 0$$

Ce qui exige :

D'abord, que $P.p$ et $Q.q$ soient de signes contraires, ou, en d'autres termes, que si le point d'application de la force P marche dans le sens de cette force, l'autre marche dans le sens opposé à la force Q.

Ensuite que les valeurs absolues de $P.p$ et de $Q.q$ soient égales : or p est l'espace parcouru par le point d'application de la force P, pendant un

certain tems, et q est celui parcouru par le point d'application de la force Q dans le même tems, en sorte que p est la vitesse de la force P, et q la vitesse de la force Q (*) : donc pour l'équibre il faut que les produits de ces deux forces chacune par les vitesses qu'elles peuvent prendre en même tems par la constitution de la machine soient égaux.

A plus forte raison cela aura-t-il lieu en cas de mouvement : nous avons vu en effet que la force P ne peut, au moyen de la machine, faire mouvoir qu'une force Q' plus petite que Q ; or si ce mouvement a lieu, les vitesses de la force motrice et de la résistance Q' seront encore p et q, lesquelles quantités satisfont à la condition

$$P.p = Q.q,$$

et en désignant par d la différence entre Q et Q' on aura

$$Q = Q' + d$$

et aussi

$$P.p = Q'.q + d.q.$$

Ainsi la résistance mise en mouvement par la force P, étant multipliée par sa vitesse q, différera du produit de la force P par sa propre vitesse d'une quantité égale à $d.q$. A la vérité la quantité d est aussi petite qu'on voudra, car sa plus petite

(*) En disant vitesse d'une force, je sous-entends ici celle de l'un de ses points d'application.

valeur produit la rupture de l'équilibre : mais enfin elle existe et cela suffit pour conclure le théorème suivant :

Si, au moyen d'une machine, on veut au moyen d'une force P *animée d'une vitesse* V, *faire mouvoir une résistance* Q ; *le mouvement pourra toujours avoir lieu, mais la vitesse acquise par la force* Q *étant* V′, *ce qu'on pourra obtenir tout au plus c'est que le produit* Q.V′ *soit égal au produit* P. V.

C'est là le principe appelé des *forces vives*, parce qu'on nomme forces vives, le produit d'une force par sa vitesse : exprimé d'une autre manière, il indique qu'une petite force n'en peut faire mouvoir une grande qu'en vertu d'une grande vitesse de sa part et d'une petite vitesse imprimée à la grande force : ensorte que par exemple, si, par le moyen d'une machine, on voulait enlever avec une force de 3 livres une résistance de 30, il faudrait donner à la force de 3 livres une vitesse décuple de celle de la force de trente, ou bien si la vitesse de la force de 3 livres était aussi donné, il faudrait disposer la machine de manière à ne donner à la force de 30 livres, qu'un dixième de la vitesse accordé à la force de 3 livres.

C'est dans ce principe que se trouve la démonstration de l'erreur de ceux qui, n'ayant jamais approfondi la science de la mécanique, s'imaginent, au moyen d'une foule d'organes mécaniques sur-

mméraires multiplier, comme ils le disent la force. Vous voyez qu'on ne peut gagner sur la force qu'en perdant sur la vitesse, et qu'ainsi cette prétendue acquisition de puissance est imaginaire.

La cause de cette erreur vient de ce que beaucoup considèrent comme analogues les phénomènes d'équilibre et ceux du mouvement : ils font ainsi abstraction de la vitesse, et par conséquent du tems. Or le tems est un véritable agent mécanique : c'est même un des élémens qui se paye, témoin le prix de la journée d'ouvrier : ainsi sans même passer par les réflexions que je viens de vous présenter, la seule omission d'un élément aussi important dans le calcul d'une force mécanique aurait suffit pour vous faire concevoir l'absurdité des conclusions qu'on en aurait tiré : aussi tout ce qui résulte de ces prétendues inventions relatives à l'augmentation de l'effet des forces motrices, ce sont des accumulations de roues, de leviers, d'engrenages, qui sans produire aucun effet avantageux sur la valeur rationelle de l'effet produit, augmentent les dépenses d'exécution et l'étendue des emplacemens, en même tems qu'ils multiplient les frottemens, les chocs, les vibrations, et toutes ces causes de destruction de la force motrice qui bien loin d'accroître par là une énergie finit par perdre toute celle qu'elle possédait en l'employant en pure perte à détruire des obstacles que l'ineptie du constructeur a placé devant elle comme à plaisir.

Je terminerai donc cette leçon en vous recommandant de ne jamais perdre de vue ce que je viens de vous démontrer :

Ce qui se gagne en force se perd en vitesse, et ce qui se gagne en vitesse se perd en force.

Indépendamment de cela rappellez-vous encore : que toute complication d'organes mécaniques ne peut altérer ce résultat que d'une manière défavorable, quelque soit d'ailleurs la perfection de ces organes, en produisant des causes de déperdition de forces motrices par les frottemens et autres circonstances et qu'en conséquence, *quelque soit une machine, jamais le produit de la force motrice par sa vitesse ne peut être rendu entièrement par celui de la force et de la vitesse obtenues, et que la perte est généralement parlant d'autant plus grande que la complication de la machine est plus grande.*

Enfin, que toutes les défectuosités d'exécution en produisant des *chocs*, des *à-coups*, des frottemens plus durs, augmentent encore les déperditions de forces vives : en sorte que deux machines semblables construites par deux différens ouvriers peuvent avoir de telles différences que l'une ne puisse être comparée à l'autre.

Voilà les motifs sur lesquels on peut établir que les vraies perfections d'une machine consistent dans sa simplicité et les soins apportés à la construction et à l'assemblage de ses pièces.

STATIQUE

HUITIÈME LEÇON.

Des momens : leur définition ; quelques théorêmes sur les forces parallèles ; autre démonstration du principe général d'équilibre entre deux forces parallèles, agissant sur une machine quelconque.

1. On appelle *moment* d'une force par rapport à un point, le produit de la force par la longueur de la perpendiculaire menée du point sur la force. L'emploi de ces produits ou momens, change les théorêmes de composition des forces, en d'autres exprimés d'une manière plus concise, aussi facile à concevoir et à retenir, et plus générale.

Le théorême sur lequel est basé toute la théorie des momens pour les corps solides est celui-ci :

Le moment de la résultante de deux forces est égal à la sommes des momens des composantes.

Soit (fig. 3, planche 9) P et Q deux forces et R leur résultante : o étant le point d'après lequel on veut prendre les momens de ces forces, abaissons les perpendiculaires op, oq, or, les momens cherchés seront

$$P \times op, \quad Q \times oq, \quad R \times or.$$

Maintenant soit R = AR, Q = AQ, et menons RQ; RQ sera parallèle à la direction de la force P, et égal à cette force.

D'après cela les momens des forces pourront être aussi exprimés par les trois quantités suivantes :

$$QR \times op, \quad AQ \times op, \quad AR \times or.$$

Menons à présent les droites oA, oR et oQ, nous aurons formé trois triangles oRA, oRQ, oQA, et les superficies de ces triangles pourront être représentées par les valeurs suivantes :

$$\text{Surface } oRA = \frac{1}{2}\, AR \times or.$$

$$\text{Surface } oQA = \frac{1}{2}\, AQ \times oq.$$

$$\text{Surface } oRQ = \frac{1}{2}\, RQ \times (op + pb) =$$

$$= \frac{1}{2}\, RQ \times op + \frac{1}{2}\, RQ \times pb.$$

Or, $\frac{1}{2}\, RQ \times pb$ est égal à la surface du triangle RAQ, d'où il suit que

$$\text{Surface } oRQ = \tfrac{1}{2}\, RQ \times op + \text{surface } RAQ.$$

En ajoutant les deux triangles oRQ et oQA on a la surface quadrangulaire $oRQA$; de même en ajoutant le triangle ARQ au triangle oRA, on a

encore cette surface. Ainsi, la somme des deux premiers triangles est égale à celle des deux seconds, ce qui s'exprime ainsi :

$$\text{Surface } o\text{RA} + \text{surface ARQ} =$$

$$= \text{surface } o\text{QA} + \text{surface } o\text{RQ}.$$

ou $$\frac{1}{2}\ \text{AR} \times or + \text{surface ARQ} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{RQ} \times oq + \frac{1}{2}\ \text{RQ} \times op + \text{surface ARQ},$$

ou bien en retranchant de part et d'autre la surface commune ARQ et en multipliant les restes par 2,

$$\text{AR} \times or = \text{AQ} \times oq + \text{RQ} \times op$$

ce qui équivaut à

$$\text{R} \times or = \text{P} \times op + \text{Q} \times oq$$

C'est-à-dire que le moment de la résultante des forces P et Q par rapport au point o, est égal à la somme des momens de ses composantes par rapport au même point.

D'après cela il est facile de trouver le moment de la résultante de tant de forces qu'on voudra appliquées à un même point ou à un système plus compliqué.

Soient P, P′, P″, P‴.......etc. toutes ces forces. Désignons par p, p', p'', les distances de ces forces à un point o par rapport auquel on cherche le

moment de la résultante. Ceux des composantes seront $P.p$, $P'p'$,....... et si nous nommons R' la résultante des deux forces P et P', nous aurons

$$R'.r' = P.p + P'.p'.$$

r' étant la distance de la force R' au point o.

Désignons maintenant par R'' la résultante de R' et de P'' et par r'' sa distance au point o, on aura

$$R''.r'' = R'.r' + P''.p'' = P.p + P'.p' + P''p''.$$

Ainsi le moment de la résultante des trois forces P, P', P''..... est égal à la somme des momens de ces forces.

En raisonnant ainsi on trouve enfin, R étant la résultante de toutes les forces P, P', P'', P'''...... du système et r sa distance au point o,

$$R.r = P.p + P'.p' + P''.p'' + P'''.p''' + \ldots..$$

C'est-à-dire, que le moment de la résultante de forces qui agissent sur un système plan est égal à la somme des momens de ces forces.

Il faut observer, quand on veut employer la somme des momens d'un système de forces pour déterminer sa résultante de prendre avec des signes contraires, les momens des forces qui tendent à faire tourner le corps en sens opposé autour du point par rapport auquel les momens sont pris, et avec des

signes semblables ceux des forces qui tendent à faire tourner le corps dans un même sens.

2. Delà dérive une construction bien simple pour trouver la résultante de plusieurs forces agissant sur un système solide plan. Prenons sur le plan trois points o, o' o'' (fig. 4, planche 9) et calculons pour ces trois points la somme des momens des composantes nous trouverons

$$R.r = K, \quad R.r' = K', \quad R.r'' = K''.$$

r, r', r'' étant les distances de la résultante R au point o, o', o'' et K, K', K'' les sommes des momens des forces P, P', P''...... par rapport aux mêmes points o, o', o''.

Menez ensuite les lignes parallèles d'une direction arbitraire : puis prenez $oa = K$, $o'a' = K'$, $o''a'' = K''$, et formez les triangles $o'Ba'$, $o'a'B'$, la droite qui joint les sommets B et B' de ces deux triangles, est la direction de la résultante cherchée R : pour avoir sa grandeur, abaissez d'un des trois points, le point o' par exemple la perpendiculaire o' r', sur BB' et vous aurez

$$R = \frac{K'}{or'}$$

3. Cette expression du théorême des momens a lieu également dans l'espace : seulement alors on prend les momens par rapport à un axe : dans ce cas on décompose la force P dont on veut avoir le

moment en deux autres P′ et P″, l'une parallèle à l'axe, l'autre perpendiculaire à cet axe, et toutes deux situées avec la force P dans un même plan parallèle à l'axe. Alors on dit que le moment de la force P par rapport à cet axe est égal au produit de la composante P″, multipliée par la distance de l'axe au plan.

Il n'entre pas dans notre plan de développer ici les théorêmes relatifs à la composition des momens dans l'espace : voici seulement leur résumé le plus utile.

4. I. Si l'on décompose de la manière précédemment indiquée toutes les forces d'un système, on aura à leur place un groupe de forces, les unes parallèles à l'axe, les autres perpendiculaires à cet axe : la somme des momens de ces dernières sera le moment du système par rapport à l'axe.

II. Pour que le système soit en équilibre, il faut que, les forces étant ainsi décomposées par rapport à un axe quelconque, la somme des forces parallèles à l'axe soit nulle et que le moment total du système soit aussi nul.

III. Enfin il suffit que ces conditions aient été vérifiées par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux pour que l'équilibre soit démontré. Ces théorêmes vous suffisent pour trouver de suite les conditions d'équilibre d'un système solide libre : mais comme nous n'aurons pas lieu de nous en servir, nous n'en parlerons pas davantage ici,

nous réservant d'y revenir plus tard en les considérant sous un autre point de vue

5. Voici néanmoins deux théorèmes qu'on a coutume de rapporter à la théorie des momens quoiqu'ils n'en dépendent véritablement pas. Ils sont relatifs à la détermination du centre des forces parallèles pour un système solide quelconque.

Soient, fig. 5, une droite DE et plusieurs forces P, P', P''.... parallèles à cette droite, appliquées aux points A, A', A''.... et tirant dans le même sens.

Soit en outre R la résultante de ces forces et C le point par lequel passe cette résultante; la distance du point C à la droite DE sera égale à celle d'un point quelconque D de cette dernière à la force R. La même chose aura lieu par rapport aux autres forces, en sorte que r, p, p', p''.... représentant les distances des points C, A, A', A'', à la droite CD, les momens de toutes ces forces par rapport au point D seront $R.r$, $P.p$, $P'.p'$... etc. Or on doit avoir le moment de la résultante égal à la somme de ceux des composantes; donc

$$R.r = P.p + P'.p' + P''.p''.....$$

Mais le centre des forces parallèles ne change pas lorsqu'on change seulement la direction des forces : si donc nous tournons toutes les forces à angles droits sur leur première direction, le point C restera toujours où il est, et l'équation que nous venons de trouver ne cessera pas d'avoir lieu.

Ainsi lorsqu'on a plusieurs forces perpendiculaires à une droite, la distance du centre de ces forces à la droite est égale à la somme des produits des forces par les distances respectives de leurs points d'application à la droite, le tout divisé par la résultante de ces forces, laquelle est égale à leur somme.

Nommons donc y, y', y''.... les distances des points d'un système à une droite horizontale, x, x', x''.... les distances de ces mêmes points à une droite verticale, et P, P', P''..... les forces appliquées à ces points parallèlement et dans le même sens d'action; désignons en outre par X et Y les distances du centre des forces parallèles aux deux droites verticale et horizontale dont nous avons parlé, nous aurons

$$X = \frac{P.x + P.'x' + P.''x''.....}{P + P' + P''.....}$$

$$\text{et} \quad Y = \frac{P.y + P.'y' + P.''y''}{P + P' + P''}$$

Cette formule vous donne donc le moyen de trouver le centre des forces parallèles d'un système plan à deux droites, et par conséquent de le déterminer complètement.

6. Si $y, y', y''.... x, x', x''....$, sont les distances des molécules d'un corps aux deux axes, et P, P', P'' leurs masses ou leur pesanteur, alors la

formule donne les distances x et y du centre de gravité, qui dans ce cas n'est que celui des forces parallèles : c'est ce qu'on exprime en disant que *la distance du centre de gravité d'un système plan à une droite, est égale à la somme des produits des distances des molécules du corps à cette droite, multipliée chacune par sa masse respective, divisée par la somme des molécules ou la masse entière du corps.*

En étendant ces théorèmes à trois dimensions, on trouve des expressions analogues que voici :

I. *La distance du centre des forces parallèles d'un système à un plan donné est égale au quotient de la somme des produits de ces forces par les distances de leurs points d'application à ce plan, divisée par la somme des forces.*

II. *La distance du centre de gravité d'un corps à un plan est égale à la somme des produits des masses des molécules de ce corps, multipliée par leurs distances à ce plan, divisée par la somme de ces masses ou la masse totale du corps.*

III. Ce dernier théorème peut encore s'énoncer ainsi : *Le moment du centre de gravité d'un corps par rapport à un plan est égal à la somme des momens par rapport à ce même plan des masses moléculaires qui composent le corps.*

7. Nous allons passer maintenant à la démonstration du théorème que nous avons déjà démontré dans la leçon précédente, mais que nous allons

conclure ici directement de ce que nous avons exposé sur la théorie des momens.

Soient donc (planche 9 fig. 6) deux points A et B d'une machine, auxquels points sont appliquées deux forces P et Q, agissant dans le sens de la pesanteur, ou plutôt deux poids P et Q. En vertu de leur liaison établie par la machine, l'un des poids ne pourra prendre un mouvement sans que l'autre en prenne un aussi, et si l'un des deux points d'application se meut dans le sens BB', l'autre se mouvra dans un autre sens AA' déterminé par la nature de la machine.

Cela posé, cherchons la hauteur du centre de gravité des deux poids au dessus d'un plan horizontal fixe, lequel sera évidemment perpendiculaire à la direction des forces P et Q; d'abord pour la position primitive des points A et B, et ensuite pour celle correspondante aux points A' et B'.

Désignons par x et y les hauteurs des points A et B au dessus du plan fixe, par X celle du centre de gravité des deux poids dans cette position : désignons en outre par x' et y' les hauteurs des points A' et B', et par X' celle du centre de gravité des poids P et Q, dans cette autre position, nous aurons :

$$X = \frac{P.x + Q.y}{P + Q.}$$

et $$X' = \frac{P.x' + Q.y'}{P + Q.}$$

d'où l'on conclut en retranchant l'une de ces équations de l'autre

$$X' - X = \frac{P.x' + Q.y'}{P + Q} - \frac{P.x + Q.y}{P + Q.}$$

$$\text{et } X' - X = \frac{P(x' - x) + Q(y' - y)}{P + Q.}$$

c'est l'expression de la quantité dont le centre de gravité sera monté ou descendu par le mouvement des points A et B pour se placer en A' et B'.

Mais d'une part si l'on considère qu'au lieu des forces P et Q on peut placer leur somme à leur centre de gravité sans cesser d'obtenir le même effet sur la machine, et si de l'autre on se rappelle ce que nous avons déjà dit, qu'une force ne peut obtenir d'effet perpendiculaire à sa direction, on verra facilement qu'aucun mouvement ne peut avoir lieu en vertu de l'action de la résultante des deux poids ou de l'action de ces deux poids eux-mêmes sur la machine, si cette machine est construite de manière à ce que le centre de gravité des deux poids ne puisse ni monter ni descendre dans les diverses positions de la machine : et par conséquent l'équilibre sera établi.

Or si l'on veut chercher à quoi cette condition répond, il faudra observer que dans l'équation

$$X' - X = \frac{P(x' - x) + Q(y' - y)}{P + Q.}$$

on doit indiquer que X′ ne peut être ni plus grand ni plus petit que X, en d'autres termes que X′ doit être égal à X, d'où il suit

$$X' - X = o$$

et $$\frac{P.(x'-x) + Q(y'-y)}{P + Q} = o.$$

or cette dernière équation équivaut à

$$P(x' - x) = Q(y' - y).$$

Cette équation ne peut avoir lieu :

I. Sans que $x' - x$ et $y' - y$ ne soient de signes contraires, ce qui, comme nous l'avons déjà observé, équivaut à dire que les mouvemens de A et de B doivent avoir lieu en sens contraire, de manière à ce que l'un monte lorsque l'autre descend, et réciproquement.

II. Sans que l'on ait en désignant la valeur absolue de $x' - x$ par p, et la valeur absolue de $y' - y$ par q

$$P \cdot p = Q. q.$$

Ce qui veut dire que P et Q doivent être en raison inverse des espaces parcourus verticalement par leurs points d'application respectifs. Ainsi nous voici arrivés, par une route toute différente, au principe que nous connaissions déjà, et nous voyons deux raisonnemens qui ne se ressemblent par aucun point, tendre au même résultat et se confirmer réciproquement dans l'exactitude de leur marche.

8. Lorsqu'une machine est telle que pour toutes ses positions possibles, la condition $P.p = Q.q$ est remplie, l'équilibre a aussi lieu dans toutes ces positions, et l'on peut le désigner par le nom d'équilibre invariable ou permanent. C'est le cas d'un grand nombre de machines simples, et particulièrement de celles qui agissent en vertu d'un mouvement de rotation autour d'un axe par rapport auquel elles sont symétriques.

9. Mais ce cas n'arrive pas toujours : il se fait au contraire souvent qu'il n'existe dans une machine qu'une ou deux positions dans lesquelles l'équilibre peut avoir lieu. Il est donc utile de savoir comment on peut les reconnaître : or c'est ce qui n'est pas difficile.

Lorsque les deux forces P et Q se meuvent, il se peut :

Ou que leur centre de gravité commun reste fixe;

Ou que ce centre de gravité décrive une droite : et dans ce cas cette droite pourra être horizontale ou inclinée par rapport à l'horizon;

Ou enfin que le centre de gravité décrive une courbe quelconque, mais qui pourra, suivant de certaines circonstances, être renfermée dans un plan horizontal, ou serpenter d'une manière ou d'autre dans l'espace.

Dans le cas où le centre de gravité sera un point fixe, ou parcourra une droite horizontale,

ou bien une courbe placée sur un plan horizontal, il y aura équilibre permanent, et en effet, dans ces cas, quelle que soit la situation de la machine, pour que la pesanteur pût produire du mouvement il faudrait qu'elle fût capable de faire marcher un point perpendiculairement à sa direction, ce qui, comme nous l'avons vu, est absurde.

Dans le cas où il décrit une droite inclinée, on voit que l'équilibre ne peut avoir lieu en aucune manière, puisque la force appliquée au centre de gravité pourra toujours obtenir son effet en faisant descendre ce point, et par suite en faisant mouvoir le système.

Enfin lorsque le centre de gravité décrit une courbe, on peut pour chaque point de la courbe considérer le point matériel qui représente le centre de gravité, comme appuyé sur une petite ligne droite, confondu avec un très-petit arc de la courbe. Alors l'équilibre aura ou n'aura pas lieu, suivant que cette ligne sera horizontale ou inclinée à l'horizon. Or les inclinaisons des petits arcs peuvent être représentées par ceux des tangentes, ainsi l'équilibre aura lieu pour les positions qui correspondront à la coïncidence du centre de gravité du système, avec les points de la courbe décrite, ou les tangentes sont horizontales, c'est-à-dire, les points les plus hauts ou les plus bas de la courbe.

Cette condition étant obtenue donne deux

sortes d'équilibre, suivant que le centre de gravité des deux forces se trouve au point le plus élevé ou au point le plus bas de la courbe : dans le premier, on voit que le moindre dérangement dans le système place le centre sur une droite inclinée, et par conséquent le met en disposition de céder à la pesanteur et de donner du mouvement à la machine. Aussi dans ce cas on donne le nom d'équilibre ***non stable*** à l'état de la machine.

Dans l'autre hypothèse, au contraire, si l'on dérange un peu le système, le centre de gravité tend à revenir à sa première position, et il y revient en effet au bout de quelques oscillations : c'est là l'équilibre stable.

Ces deux dernières sortes d'équilibre se vérifient comme les autres par la condition $P.\,p = Q.\,q$ seulement il faut avoir attention de prendre les chemins parcourus très-petits, puisque, comme la position du centre de gravité doit être considérée sur un infiniment petit arc de la courbe, il faut n'imprimer à la machine qu'un mouvement infiniment petit, pour ne pas courir la chance de prendre deux positions successives du centre de gravité qui n'auraient entre elles aucun rapport de continuité.

Quelques exemples bien simples vont vous aider à concevoir tout ce que je viens de dire.

I. Imaginons d'abord une verge inflexible AB

(planche 9 fig. 7), suspendue à son milieu par un point fixe F, et parfaitement symétrique par rapport à ce point. Supposons en outre à ses deux extrémités deux sphères pesantes égales et homogènes dont le poids est P.

Il est évident ici que, quelle que soit la position de ce levier, le centre de gravité des deux poids sera toujours en F ; ainsi l'action de la pesanteur ne pourra le faire descendre : il y aura donc équilibre dans toutes les positions du système. C'est le cas de l'équilibre permanent.

II. Soit maintenant AF (planche 9 fig. 8) une autre verge inflexible, pouvant tourner autour du point fixe F et supportant à ses extrémités deux sphères pesantes A et B, égales et homogènes, et par conséquent égales en poids. Supposons en outre que le point de suspension F de ce système ne soit pas au milieu de la droite AB.

Le centre de gravité étant au milieu de AB ne coïncidera donc pas avec F, il sera placé en o, et comme la distance oF est invariable, on voit aisément que dans tous les mouvemens du système, le point o décrira un cercle o, o', o'', o''', lequel aura pour centre le point fixe F.

Imaginons maintenant le diamètre oo'' perpendiculaire à l'horizon ; ses deux bouts o et o'' seront visiblement l'un le plus haut, l'autre le plus bas des points de la circonférence : la position du centre de gravité en o, correspondra à l'équilibre

non stable ; car on voit facilement que, pour peu qu'on dérange ce point à droite ou à gauche, il sera entraîné par la pesanteur sur la courbe du cercle, et descendra, entraînant avec lui le système, jusqu'à ce qu'il ait pris la position o''.

Au contraire, à la position o'', si l'on dérange un peu l'équilibre en faisant tourner le système à droite ou à gauche, le centre de gravité, sollicité par la force de la pesanteur, tendra à redescendre sur le cercle jusqu'à ce qu'il ait repris le point le plus bas, et se soit ainsi rapproché de l'équilibre. C'est bien là le cas que je vous ai indiqué sous le nom d'équilibre stable. Nous verrons plus tard des exemples plus intéressans de ces divers états d'équilibre. Ceux-ci suffisent pour le moment.

9. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que la machine était seulement soumise à l'action de la pesanteur ; mais il se peut faire aussi que les deux forces, au lieu d'être deux poids, soient des puissances dirigées arbitrairement dans l'espace : mais alors on peut toujours les faire rentrer dans le cas dont nous parlons, en les représentant par des cordons tendus au moyen de poulies de renvoi dans la direction donnée, et supportant à leurs extrémités des poids égaux aux forces : alors le cas rentre dans celui que nous avons donné.

10. Il devient indispensable aussi dans la construction des machines et l'estimation de leur puissance équilibrante, d'avoir égard aux poids des

diverses pièces qui les composent. On pourra d'abord représenter ces poids par des forces parallèles à la pesanteur et attachées aux centres de gravité de ces pièces ; alors la machine, au lieu d'être soumise à l'action de deux forces seulement, peut être considérée comme soumise à celle d'un plus grand nombre : mais il est facile de voir que le raisonnement que j'ai employé pour deux forces peut également servir pour un plus grand nombre. Ainsi vous pourrez choisir des deux méthodes : ou bien chercher le centre de toutes ces forces parallèles et voir la courbe qu'il décrit par les mouvemens de la machine pour trouver les points les plus hauts et les plus bas de la courbe ; ou bien faire prendre à la machine un petit mouvement, et voir pour chacune des forces parallèles P, P', P'',... l'espace p, p', p'', que son point d'application parcourra verticalement ; puis établir la condition

$$P.p + P'.p' + P''.p''..... = 0$$

en ayant soin de faire entrer comme négatifs les espaces parcourus en sens contraire de l'action des forces, et comme positifs ceux parcourus dans le sens de ces mêmes forces. Le principe est le même que pour deux forces ; seulement son application, sans être plus difficile, est plus compliquée et demande plus d'attention.

11. Enfin il se présente encore une autre considération fort importante, c'est celle qui est rela-

tive à l'influence du frottement dans l'équilibre des machines; cette influence, qui est à l'avantage de l'équilibre, est toujours au désavantage de la force qui veut produire du mouvement. C'est ce qui vous doit être facile à concevoir, en réfléchissant que le frottement est une force qui ne se développe que par la tendance au mouvement, et qui doit toujours être vaincue par l'action qui tend à produire le glissement des surfaces l'une sur l'autre. Or cette action est ici celle de la force motrice.

Dans une machine, les pièces composantes réagissent les unes sur les autres par les points de contact de leurs surfaces, et ces points de contact sont toujours rigoureusement connus : on peut par des décompositions fort simples estimer les pressions exercées sur ces surfaces, et par suite les frottemens et leur direction. Lorsqu'on voudra ensuite connaître l'influence de ces frottemens sur l'équilibre, on donnera un petit mouvement à toute la machine, et dans cette hypothèse on estimera les vitesses de chaque point frottant ; puis on multipliera ces vitesses chacune par la quantité de frottement correspondante ; on fera la somme de ces produits qui seront tous négatifs, et on l'ajoutera à la quantité $P.p + P'.p' + P''.p''$...... et l'on aura la quantité qu'il faut rendre nulle ou négative pour trouver la condition d'équilibre.

Désignons donc par — K cette somme des mo-

mens virtuels des frottemens : K étant un nombre positif, nous aurons pour condition

$$P.p + P'.p' + P''.p''... - K = 0 \text{ ou } < 0$$

Si l'on voulait établir l'équation d'équilibre sans frottemens, il faudrait écrire

$$P.p + P'.p' + P''.p''... = 0$$

Dans ce cas on voit que la quantité précédente sera toujours négative ; ainsi lorsque l'on a trouvé les conditions de l'équilibre pour une machine sans frottement et qu'on en a déduit les relations entre les forces, si l'on vient à introduire la condition de frottement, l'équilibre aura encore lieu.

Il y a même plus : si l'on prend parmi toutes les forces P, P', P''....., une de celles, la force P, par exemple, pour laquelle la quantité Pp soit positive, on pourra, sans rendre positive la somme des produits $P.p$, $P'.p'$, $P''.p''$, et $-K$, augmenter la force P de valeur ; ainsi, en laissant toutes les autres forces dans l'état d'équilibre sans frottement, la force P pourra, sans rompre l'équilibre avec frottement, prendre une valeur plus grande que sa valeur primitive, pour toute tendance au mouvement de la machine, en vertu de laquelle ce point d'application de la force P se mouvrait dans le sens de cette force. Or cette tendance correspond au cas où l'on voudrait que la force P agît de manière à produire du mouve-

ment et à rompre l'équilibre. Ainsi, après avoir déterminé la grandeur de la force P dans le cas du non frottement, si l'on veut que cette force l'emporte ou soit tout près de l'emporter sur les autres, il faudra lui donner la plus grande des valeurs qui donnent le signe négatif à la quantité $P.p + P'.p' + P''.p'' - K$, ou, en d'autres termes, la valeur $P + d$ qui satisfait à l'équation

$$(P + d).p + P'.p' + P''.p''.... - K = 0$$

ou $P.p + P'.p' + P''.p''..... + d.p - K = 0$

et comme

$$P.p + P'.p' + P''.p'' = 0$$

on doit avoir

$$d.p = K$$

ce qui correspond à dire que la force augmentative d et les forces du frottement, considérées comme forces actives, doivent se faire équilibre pour le mouvement qu'on veut faire prendre à la machine. Ce théorème très-simple sera développé plus tard dans beaucoup d'applications. Il me suffit pour le moment de vous avoir fait envisager sous un point de vue général, que tout ce qui peut entrer dans l'équilibre des machines quelles qu'elles soient, peut être soumis à une recherche mathématique, exacte et rigoureuse.

STATIQUE.

NEUVIÈME LEÇON.

Du levier : ses diverses modifications : équilibre des voûtes, détermination de la résistance des barres de diverses substances : tables y relatives.

1. Le levier est la plus simple et l'une des plus usitées parmi les machines élémentaires. Il se compose uniquement (planche 10, fig. 1) d'une tige AFB de bois ou de métal, droite ou courbe, rendue fixe à un de ses points F, soit au moyen d'un axe qui la traverse, soit par un appui quelconque pris sur un corps solide hors de la base.

Dans cet état on doit imaginer deux forces P et Q, appliquées à ses extrêmités A et B; l'une sera si l'on veut une force produite par un moteur quelconque, l'autre une résistance qui s'oppose à l'action de ce moteur.

Pour trouver les conditions d'équilibre il faudra d'abord donner un petit mouvement au levier, puis voir les espaces parcourus par les forces ou du moins par leurs points d'application, et appliquer ce que nous avons dit à ce sujet dans les deux leçons précédentes.

Mais, d'après la manière même dont nous avons posé la définition du levier, il se présente deux hypothèses de mouvement : l'une dans le cas où le levier peut glisser sur son point d'appui, l'autre où ce point d'appui est absolument fixe et traverse le levier à la manière d'un axe : voici comme on doit traiter successivement les deux cas.

2. Supposons d'abord le levier fixé par un axe en F. Dans ce cas il ne pourra prendre qu'un mouvement de rotation autour de l'axe. Décomposons chaque force P et Q en deux autres, P' et f, Q' et f', P' et Q' étant perpendiculaires au levier, et f et f' dirigées dans le sens de ce levier que je suppose ici rectiligne.

Les deux forces f et f' sont détruites par la résistance du point d'appui, et conséquemment n'entrent pour rien dans l'équilibre ; ainsi on n'aura qu'à considérer les forces Q' et P', les seules qui puissent y influer pour quelque chose.

Faisons décrire un très-petit mouvement au levier : le point F restant fixe, les points A et B viendront se placer en A' et B', conservant leurs distances respectives avec le point F, en sorte que les espaces parcourus par les points d'application des forces P' et Q' seront AA', et BB'. D'après cela nous devrons avoir pour l'équilibre

$$P' \times AA' = Q' \times BB'.$$

ou $$P' : Q' :: BB' : AA'.$$

mais d'une autre part les deux triangles BB'F et AA'F sont isoscèles et semblables, et par conséquent on a

$$BB' : AA' :: BF : AF$$

d'où l'on conclut naturellement

$$P' : Q' :: BF : AF.$$

Ainsi dans le cas dont nous parlons, pour que les forces P et Q soient en équilibre il faut que leurs deux composantes P′ et Q′ soient en raison inverse des longueurs des bras du levier compris entre ce point d'appui et leurs points d'application respectifs.

Mais lorsque le levier n'est qu'appuyé sur un corps résistant, alors il faut une condition de plus : c'est que le levier ne glisse pas sur le point d'appui : or, c'est ce qui ne peut se faire qu'autant que les deux forces f et f' se détruisent réciproquement : ainsi dans ce cas il faut encore que les deux composantes de P et de Q parallèles au levier soient égales entre elles.

3. Telle est toute la théorie du levier lorsqu'on y fait abstraction du frottement et du poids de ses parties ; mais lorsqu'on y introduit ces diverses considérations, la question se complique davantage.

Prenons d'abord le cas du levier traversé par un axe. Soit donc (planche 10, fig. 3) $aa'a''$ la coupe de l'axe du levier que nous supposons cylin-

drique; pour loger ce cylindre, on en a foré un autre creux d'un diamètre tant soit peu plus grand dans le corps du levier, en sorte qu'on peut supposer le mouvement du levier très à peu près concentrique avec son axe de rotation. Soient ensuite P et Q les forces qui tendent à se faire équilibre au moyen du levier; en vertu de ce que nous avons vu si elles étaient d'elles-mêmes en équilibre, on aurait

$$P : Q :: BF : AF$$

d'après cela il est aisé de voir que leur résultante passerait par le point F, et serait par conséquent normale en a à la surface de l'axe, de plus elle serait égale à $P + Q$.

Soit maintenant ϕ le rapport du frottement à la pression pour les deux surfaces de contact, nous aurons pour la valeur f de la résistance due au frottement

$$f = \phi . (P + Q).$$

Cherchons ensuite de combien nous devrions augmenter les forces P et Q pour que l'une ou l'autre fût prête à emporter le mouvement, et commençons par la force Q, P restant la même.

Imaginons que le système ait pris un petit mouvement. L'arc décrit par la force du frottement sera par exemple aa'; celui décrit par la force Q, sera dans la même circonstance BB′: désignant

donc par d la quantité dont on doit augmenter Q pour être près de rompre l'équilibre, nous aurons

$d. \times BB' = f \times aa'$. (V. la fin de la leçon 8e.)

d'où $$d = f. \times \frac{aa'}{BB'}.$$

soit maintenant ρ le rayon de l'axe, on aura en vertu de la similitude des triangles Faa', FBB',

$$\frac{aa'}{BB'} = \frac{\rho}{FB.}$$

ce qui donne

$$d = f \times \frac{\rho}{FB.}$$

et comme f est égal à $\phi.(P+Q)$ on trouve enfin

$$d = \phi \times (P+Q) \times \frac{\rho}{FB.}$$

d'une autre part Q est égal à $P \times \frac{FR}{FB.}$ ainsi cette valeur de d devient

$$d = \phi \times P \times \frac{FA + FB}{FB} \times \frac{\rho}{FB.}$$

ou $$d = \phi \times \rho \times \frac{AB}{FB^2} \times P.$$

et enfin la valeur de la force qui est prête à l'emporter sur la force P sera

$$Q + d = P \times \frac{FA}{FB} + \phi \times \rho \times \frac{AB}{\overline{FB}^2} \times P$$

$$= \frac{FA \times FB + \phi \times \rho \times AB.}{\overline{FB}^2.} \times P.$$

c'est l'expression de la force qui, quoique faisant équilibre à P, ne peut plus être augmentée sans produire de mouvement.

Appliquons cela à un exemple: supposons que AF = 4 mètres, que BF = 2 mètres; que le rayon de l'axe ou ρ soit d'un décimètre, que cet axe soit en acier et le corps du levier en cuivre, auquel cas nous aurons $\phi = \frac{1}{7}$; admettons que la force P soit de 50 kilogrammes, nous aurons pour $Q + d$, la valeur suivante :

$$\frac{4 \times 2 + \frac{1}{7} \times 0,1 \times 6}{4.} \times 50 \text{ kilogr.}$$

ou 101 kil. 075.

Ainsi dans ce cas la force P retiendra un effort de 101 kil. 075, au lieu de 100, qu'elle aurait seulement pu balancer, dans le cas où il n'y aurait pas eu de frottement.

Vous remarquerez que la valeur dont on peut augmenter Q est en raison directe de ρ et de ϕ; ainsi plus le rayon de l'axe et le rapport de la

pression au frottement sera considérable et plus la quantité qu'on pourra ajouter à Q sans rompre l'équilibre sera considérable. Or si l'on voulait produire du mouvement, il faudrait surmonter toute cette augmentation de résistance; donc dans ce cas, il y a avantage à former le moindre diamètre possible à l'axe, et à choisir les surfaces qui donnent le moins de frottement: ceci vous explique pourquoi l'on cherche à rendre les pivots les moins épais et les mieux polis possible. On ne peut cependant pas dépasser de certaines limites en diminuant le diamètre de l'axe, vu qu'il lui faut toujours avoir assez de force pour supporter sans se briser l'action de la résultante $P + Q$.

Lorsque au lieu de tourner sur un axe fixe, le levier est simplement appuyé sur une surface par une partie quelconque de celles qui lui appartient, l'équilibre devient encore facile à établir. Nous n'avons qu'à imaginer en effet que toutes les forces puissent se réduire à une seule passant par le point de contact : alors celle-ci se décomposera en deux autres, l'une parallèle à la surface de contact, l'autre perpendiculaire. Celle-ci sera détruite, mais elle produira un frottement qui s'opposera à l'action de l'autre, et si ce frottement est plus grand que la composante parallèle à la surface de contact, l'équilibre aura évidemment lieu, sinon il sera détruit : c'est une condition facile à vérifier. Mais en général il se fera que les forces ne se réduiront

pas à une telle composante et alors l'équilibre sera détruit par un mouvement de rotation du levier sur la surface d'appui. Les considérations sur lesquelles se fondent ces résultats tenant à des propriétés particulières des surfaces, je ne les exposerai pas ici. (*)

4. Enfin s'il était question d'un levier pesant, on n'aurait qu'à comprendre dans les élémens de calcul que nous avons employés les poids des deux bras du levier en les considérant chacun comme une force; ce qui n'augmenterait pas la difficulté.

5. Le levier est un des instrumens dont les modifications utiles aux arts sont les plus nombreuses. On le divise en trois espèces qui du reste sont soumises chacune aux mêmes lois d'équilibre. On appelle levier du premier genre celui dans lequel la résistance et la puissance sont des deux côtés du point d'appui (fig. 4, planche 10); levier du second genre, celui dans lequel la puissance et la résistance sont du même côté du point d'appui (fig. 5, planche 10), la puissance étant plus éloignée que la résistance de ce point; et enfin levier du troisième genre (fig. 6, planche 10) celui où la puissance est entre la résistance et le point d'appui.

Dans le premier genre, la puissance et la résistance peuvent avoir indistinctement l'avantage; dans le second, l'avantage est toujours du côté de

(*) Voyez la note à la fin de la leçon.

la puissance, et dans la troisième au contraire toujours du côté de la résistance.

On peut compter parmi les leviers du premier genre le levier ordinaire (fig. 4), les tenailles (fig. 7), les pinces (fig. 8), etc. On voit par conséquent que ces deux instrumens auront d'autant plus de force que la machoire sera plus courte que les bras.

Le loquet d'une porte est un levier du second genre (fig. 9) : le point d'appui est l'axe du loquet; le point d'application de la puissance est la pomme ou le bouton qui sert à le soulever et la résistance est le ressort qui le presse pour l'empêcher de se dégager.

Les pincettes dont on se sert ordinairement pour les cheminées sont des leviers du troisième genre (planche 10, fig. 10). Le point d'appui est le gond de la pincette, la résistance est l'objet qu'on veut saisir par son moyen, tandis que la puissance est produite par la force musculaire de la main appliquée à la naissance des branches. Quelques leviers prennent leur point d'appui sur l'objet même qu'on veut soumettre à leur action comme la pince du charron (fig. 11) et la clef du dentiste.

Quelques autres sont une combinaison du levier et du coin. Tels sont : le ciseau du tourneur, lequel n'est autre chose qu'un levier du premier genre terminé par un coin D (fig. 12); les ciseaux qui sont aussi un levier du premier genre armé d'un

double coin aigu (fig. 13); la plane des charrons qui n'est qu'un levier du second genre dont les poignées servent tour à tour de point d'application de la puissance et de point d'appui, et au moyen duquel on porte l'action d'un coin sur la résistance. On doit aussi considérer comme une combinaison analogue de coins et de leviers, les tondeuses dont on se sert dans les fabriques de draps, (fig. 15) et qui ne sont autre chose que des leviers du troisième genre, où le point d'appui est placé dans le ressort qui lie les deux lames.

Outre ces combinaisons du levier et du coin, on employe encore fréquemment dans les besoins de la vie des combinaisons de leviers entre eux : en voici un exemple très-familier.

Lorsqu'on veut soulever l'essieu d'une voiture pour en enlever la roue ou la graisser afin de diminuer le frottement de l'essieu, on se sert à cet effet d'un instrument composé de plusieurs leviers et que dans quelques pays on nomme cheval. Il consiste d'abord (fig. 16), en une espèce de chevalet *ad* qui sert de point d'appui à un levier *ae* auquel s'applique la force motrice; ce dernier porte un axe *b* auquel est attaché le levier droit *bc* par une de ses extrémités, tandis que l'autre porte à terre en *c*. Lorsqu'on veut se servir de cet instrument, on glisse le levier *bc* sous l'essieu de la roue *f*, puis on l'enlève au moyen du levier *ae* : ainsi vous voyez que l'effort produit par une

petite force en *e* peut vaincre une grande résistance en *f*, vu que l'arc décrit par la force *e* pourra être rendu très-grand pour un très-petit trajet parcouru par le point d'appui de l'essieu. On a soin de disposer le point *b*, de manière à ce qu'on puisse lui donner une position passant à gauche de la verticale qui passe par le point *a*, parce que lorsque l'on a donné cette position au système, l'équilibre continue à subsister de lui même.

6. Les considérations relatives à l'équilibre de plusieurs leviers combinés sont au reste très-fréquentes et très-importantes. On en fait en Allemagne un fréquent emploi pour transmettre le mouvement aux pistons des pompes dans les mines à travers des sinuosités inévitables : la machine de Marly n'était autre chose qu'un appareil de ce genre, et vous en pouvez voir un semblable qui sert à puiser les eaux thermales de Chaudfontaine.

Les leviers font encore partie intégrante de plusieurs machines : ainsi dans les machines à vapeur le balancier, le parallélogramme directeur de la tige du piston, la manivelle du volant sont des leviers ou des combinaisons de leviers.

La théorie de l'équilibre des voûtes se rapporte aussi au levier. On a remarqué que lorsqu'une voûte se rompt, et qu'elle renverse ses piedroits *fg*, *he* (fig. 17) elle ne tombe pas tout entière ou absolument démolie, mais elle se divise en un certain nombre de segmens *fa*, *ab*, *bc*, *cd*, *de*,

qui tendent à réagir les uns sur les autres au moyen des arètes *f*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de leurs plans de rupture. On peut donc considérer l'équilibre du système de la figure 17 comme se rapportant à celui de sept leviers ou barres inflexibles *fg*, *ga*, *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *eh*, jointes ou articulées bout à bout et sollicitées chacune par un poids qui sera celui du segment de voûte correspondant. L'équilibre de ces leviers sera facile à établir en raison de leur symétrie et on trouvera aisément les forces latérales qu'il faut opposer au mouvement des points *e* et *f* pour arrêter le mouvement du reste.

Tout cela exige que l'on connaisse les points de rupture pour une voûte donnée : or il existe pour résoudre cette question des procédés plus ou moins compliqués qui, quoique peu exacts en théorie, ont cependant assez d'exactitude pour la pratique. Le meilleur serait de réunir en tables les expériences nombreuses faites à ce sujet, et de les compléter par d'autres expériences et ce travail utile, mais dispendieux sera peut-être un jour exécuté par les ordres d'un gouvernement auquel les dépenses ne coûtent jamais quand il s'agit de faire avancer les sciences. Au reste, la recherche analytique de ces points de rupture peut s'effectuer d'une manière aisée à concevoir quoique difficile dans son exécution : on admet un certain nombre de ruptures hypothétiques ; on calcule l'effort exercé en *e* et en *f*; puis en faisant varier les points de rupture

on cherche celles de leurs positions qui correspondent à la plus grande action horizontale : alors on considère ces positions comme celles où la rupture se ferait véritablement et la pression horizontale qui en résulte comme la véritable.

Il faudra évidemment faire entrer dans cette recherche la condition que le plan de rupture doit être une face de joint, et faire attention à la force d'adhérence exercée par le mortier ou le ciment entre les faces qui se touchent : cette dernière force a été l'objet de plusieurs recherches que je regrette de ne pouvoir consigner ici, à cause de leur trop grande étendue.

Il faut enfin pour achever la solution de ce problème, faire la recherche de la force équilibrante : lorsque le pont n'a qu'une arche, le poids des deux culées seul doit maintenir la voûte et il faudra que ce poids multiplié par la moitié de l'épaisseur horizontale de chaque culée et divisé par sa hauteur fasse équilibre de chaque côté à la pression latérale exercée.

Le poids d'un mur multiplié par sa demi largeur s'appelle le moment de stabilité du mur par rapport à l'arète extérieure autour de laquelle il pourrait tourner : ainsi ce que nous venons de dire signifie que le moment de stabilité des culées par rapport à cette arète doit être égal au moment de la poussée par rapport à cette même arète.

Si au lieu d'une seule arche il y en avait plu-

sieurs on peut à volonté rendre chaque piedroit capable d'équilibrer la portion de voûte correspondante, ou bien rejeter toutes les poussées sur les culées des deux bouts : dans ce dernier cas il suffit que les culées intermédiaires soient assez fortes pour ne pas s'écraser sous le poids de la voûte.

Une des applications les plus intéressantes de la théorie du levier est encore l'appréciation des formes et de la disposition la plus avantageuse à donner aux solides destinés à supporter des fardeaux quelconques : toute la théorie des résistances des bois, des pierres, de la fonte, ressort de celle du levier.

Supposons en effet une solive de bois ou de fonte (planche 9, fig. 9) appuyée sur deux points fixes F et F', et sollicitée à se rompre par l'action d'un poids P appliqué en B : on pourra concevoir, au lieu des appuis F et F' deux forces f et f' dirigées en sens contraire de P et disposées de manière à lui faire équilibre : on pourra également supposer au point où la rupture devra s'exercer, qu'à la place de la force on a substitué un point fixe, en sorte que la pièce sera à peu près dans le cas d'un morceau de bois qu'on veut casser en l'appuyant sur un obstacle solide, à peu près comme font les ouvriers en appuyant sur leur genou, le morceau qu'ils ont l'intention de briser.

Dans cette hypothèse, ce qui résiste à l'effet des deux forces f et f' c'est l'adhérence des molécules de

la pièce : supposons que la rupture ait lieu, elle se fera sur une certaine surface passant, par exemple, par la droite BA : il aura fallu que les forces f et f' aient rompu l'adhérence de tous les points de cette surface. Or il est facile de voir que toutes ces adhérences partielles se composeront en une seule qui sera parallèle à leur direction commune, et par conséquent perpendiculaire à la surface de rupture : en outre cette force sera proportionnelle à l'étendue de la surface, ou à la droite, AB, si la barre est un prisme rectangulaire droit, ou au moins un corps compris entre deux plans verticaux parallèles et deux surfaces dont les arêtes soient perpendiculaires à ces deux plans.

Dans ce cas la force d'adhérence pourra donc être représentée par une force proportionnelle à la longueur AB, et passant par le milieu de cette droite, en sorte que son moment par rapport au point B sera égal à $\frac{1}{2}.\overline{AB} \times \overline{AB} \times K$, K étant une constante qui dépend de l'adhérence des surfaces et par conséquent de la nature du corps. D'une autre part les forces f et f' qui tendent à produire la rupture ont pour moment l'une $aB \times f$, l'autre $a'B \times f'$, et comme f et f' sont les composantes de la force P, ces deux momens seront égaux, et chacun d'eux pourraêtre représenté par $P.\frac{aB \times a'B}{aa'}$. Or pour que la résis-

tance de la surface à la rupture fasse équilibre à l'action de la force qui tend à briser la barre, il faut évidemment que son moment soit égal à celui de celle des deux forces f et f' qu'on voudra choisir, ainsi l'on devra avoir

$$\frac{1}{2} K \times \overline{AB}^2 = P . \frac{aB \times a'B}{aa'}.$$

Vous voyez de là qu'à résistance égale de la part de la surface, la force P devra être d'autant plus grande que $aB \times a'B$ sera plus petit, et vice versa. Or ce produit $a'B \times aB$ devient visiblement d'autant plus grand que le point B approche davantage du milieu de aa', et d'autant plus petit qu'il s'en éloigne plus pour se rapprocher des bouts de la barre. Il résulte donc de là que la position la plus favorable pour obtenir la rupture est d'agir avec la même force sur le milieu de la barre, tandis qu'on obtient un résultat de moins en moins énergique lorsqu'on applique le poids ou la force plus près des points d'appuis.

Un autre résultat de notre équation, c'est la direction de la cassure pour les corps non fibreux et homogènes : en effet si vous observez ce qui se passe dans la rupture d'une barre, vous sentirez facilement que cette rupture aura lieu dans l'endroit qui offre le moins de résistance. Ainsi, si la surface de rupture doit passer par un point donné ou connu, elle se dirigera suivant celle de toutes

les surfaces passant par ce point qui sera la plus petite en étendue : d'où il suit qu'un corps homogène se cassera suivant des surfaces planes, et que ces surfaces seront connues en menant par les points où elles doivent passer des plans normaux à la surface de la barre opposée au point d'application de la force qui tend à produire la rupture.

Ainsi une barre carrée de fer de fonte ou d'acier fondu se cassera suivant un plan perpendiculaire à ses arètes, et la cassure sera d'autant mieux plane que l'homogénéité et la finesse du grain de la fonte sera plus parfaite.

Dans les substances fibreuses cette loi ne s'observe point comme dans celles compactes et grenues, et la rupture forme des déchirures plus ou moins irrégulières et profondes : cela vient de ce que dans ces corps la résistance est toujours égale au nombre des fibres, quelleque soit la disposition de la cassure ; ainsi il n'y a lieu ni à maximum ni à minimum dans la résistance : la seule chose qui en détermine la forme ce sont les irrégularités de texture qui en rendant quelques fibres moins fortes, ou plus roides dans un endroit que dans l'autre, déterminent sa rupture dans ces endroits, et ordonnent ainsi de la disposition relative et par conséquent de l'aspect des points de la surface de rupture.

Tout ce que je viens de dire suppose que la rupture passe par le point d'appui de la force, et

que la barre était un prisme droit : examinons le cas où la barre sera courbe en dessous, et où l'on chercherait les conditions pour que le plan de rupture ne passe pas par le point d'application de la force.

Supposons donc une barre métallique appuyée par les extrémités A et A′ sur deux appuis fixes F et F′. Donnons-lui en outre dans le plan vertical la forme indiquée dans la fig. 10 (planche 9) ; admettons enfin qu'une force P la sollicite en C, et voyons l'effort qu'elle doit être en état de soutenir pour ne pas se rompre quelque part en C′, ailleurs qu'au point d'application de la force P.

Nous pourrons comme précédemment substituer aux appuis fixes F et F′ deux forces f et f' capables de faire équilibre à la force P, et alors la barre sera sollicitée par trois forces P, f et f' qui tendront à séparer la barre en deux parties suivant une surface plane passant en C′ et normale à la courbe ADA′.

Comme tout à l'heure nous aurons :

$$f' = \mathrm{P} \times \frac{\mathrm{A}p}{\mathrm{AA'}} \quad \text{et} \quad f = \mathrm{P} \times \frac{\mathrm{A'}p}{\mathrm{AA'}}$$

D'où il suit que le moment des forces P et f pour obtenir la rupture autour du point C′ sera

$$f \times \mathrm{A}p' - \mathrm{P} \times pp'$$

expression dans laquelle on n'a qu'à mettre pour f sa valeur, et on a

$$P \times \left\{ \frac{A'p}{AA'} \times Ap' - pp' \right\}.$$

ce qui devient par quelques transformations

$$P \times \frac{A'p'}{AA'} \times Ap.$$

Or le moment où l'énergie de la force f pour produire de son côté la rupture au point C′ sera

$$P \times \frac{Ap.}{AA'} \times A'p'$$

Ce qui est justement la même valeur que tout à l'heure; ainsi l'équilibre existera autour du point C′ tant que la force d'adhérence des molécules à la surface C′ d pourra résister à l'action des forces f, f' et P, et par conséquent tant que le double du moment de cette résistance sera égal à la somme des momens des forces qui tendent à produire la rupture, ce qui exige que l'on ait

$$2.\ P \times \frac{Ap}{AA'} \times A'p' = K.\ \overline{cd}.^2$$

ou

$$\overline{c'd}^2 = 2.\frac{1}{K}\ P \times \frac{Ap}{AA'} \times A'p'.$$

Or dans toutes les positions qu'on peut donner

au point C, il est visible que $2. \frac{1}{K}. P \times \frac{A p.}{A A'}$ ne peut pas changer, d'où il suit que pour que la barre présente partout une résistance suffisante, il suffit que sa courbure inférieure soit de telle nature que le carré des normales $c' d$ soit partout proportionnelle à la distance $A p'$.

Or ceci est évidemment une propriété importante, puisqu'elle sert à démontrer qu'il n'est pas nécessaire de donner à la barre une hauteur constante ; et par conséquent qu'on peut diminuer beaucoup la matière qui doit y entrer, sans diminuer sa force de résistance.

Nous pouvons étendre cette considération à d'autres objets encore : si, par exemple, une barre de fer doit servir au roulage de chariots destinés au transport des fardeaux, il faut que dans chacun de ses points elle puisse opposer la même résistance à la fracture : c'est le cas où on calculerait la résistance à opposer en $c'd$ non seulement pour la position que nous avons admise pour la force P dans la recherche précédente, mais encore pour toute autre force égale à P et placée dans toute autre position possible sur la barre.

Or il est évident que si la résistance à la fracture en $c'd$ est suffisante pour l'empêcher dans le cas où la force P aura acquis le plus d'énergie possible, le problème sera résolu.

Mais cette plus grande énergie est certainement correspondante à la plus grande valeur de

$$2.\frac{1}{K} \times P \times \frac{Ap}{AA'} \times A'p'$$

et cette plus grande valeur est celle qu'on obtient en faisant

$$Ap = \frac{1}{2} AA'$$

d'où il suit qu'il suffit que la barre puisse dans chacun de ses points donner une section normale à sa courbure inférieure capable de produire une résistance égale à

$$\frac{1}{K.} \times P \times A'p'.$$

Ce qui donne encore pour le carré de la normale une quantité proportionnelle à Ap', mais moins grande que dans le cas précédent : vous observerez du reste que dans cette hypothèse la courbure inférieure de la barre doit être symétrique par rapport à un plan vertical perpendiculaire à sa longueur.

Enfin il pourrait se faire que la barre dût supporter à la fois l'action de plusieurs forces placées sur différens points de sa longueur : alors il faudrait calculer séparément pour chacune de ces forces la quantité

$$2.\frac{1}{K} \times P \times \frac{Ap}{AA'} \times A'p',$$

et la somme de toutes ces quantités donnerait la valeur du carré $\overline{c'd^2}$ de la normale à la courbure inférieure de la barre, correspondant aux points de la courbure ou de la surface plane supérieure.

Si, comme cela peut arriver encore, on voulait avoir des barres ou arceaux en forme de ceintre, la théorie de l'équilibre s'établirait sur les mêmes bases que pour les barres solides, et l'on déterminerait de même les courbures inférieures ou supérieures des arceaux.

Dans tous ces cas je n'ai point eu égard à l'élasticité de la fonte ou des métaux : il est visible qu'on peut sans danger négliger dans l'équilibre les résultats de cette dernière force qui ne tend qu'à permettre de diminuer les dimensions des barres, en consommant pour les infléchir une portion de la puissance qui tend à les rompre. Ainsi toute recherche faite dans l'hypothèse de barres non élastiques pourra, en général, sans inconvénient être appliquée au cas des constructions ordinaires.

Dans toutes les formules précédentes la constante K renferme visiblement la largeur horizontale de la barre, ensorte qu'en nommant b cette largeur, on aura au lieu de K, $\overline{c'd^2}$ qui représente la résistance, une valeur représentée par $K'.\ b. \times \overline{c'd^2}$, K' étant une autre constante qui dépend de la nature de la substance dont la barre est composée. Il résulte de là qu'une même étendue de

surface peut produire des résistances bien différentes. Soit par exemple h la dimension verticale d'une barre quelconque, b sa dimension horizontale, et F le moment de la résistance à la rupture, moment qu'on suppose donné on aura

$$K.\ h^2\ b = F$$

Supposons ensuite que la surface donnée soit invariable et égale à S on aura

$$h.\ b = S$$

d'où $$F = K.\ h.\ S.$$

C'est-à-dire qu'en laissant la même surface de coupe à la barre, et en changeant seulement le rapport entre les deux côtés de cette surface, la résistance croitra comme la hauteur.

On voit donc qu'il y aura augmentation de résistance et par conséquent économie de matière en donnant aux barres plus de hauteur et moins de largeur horizontale. Cependant on tombe alors dans un autre inconvénient qui est de prêter trop de chances à la rupture latérale, exercée par les forces qui bien que verticales, peuvent en vertu de la moindre irrégularité dans la pose de la barre, agir de composition dans le sens perpendiculaire au plat de la barre.

C'est pour parer à cet inconvénient qu'on employe les contreforts ou saillies faites sur le plat de la barre : ces contreforts peuvent être déterminés dans leurs formes et leurs dimensions par les mêmes réflexions que celles que j'ai exposées plus haut.

J'ai cru pouvoir être utile en plaçant à la fin de cette leçon un extrait des tables données par Tredgold sur la résistance des barres et des piliers. On trouvera à leur suite quelques notes sur leur emploi.

TABLE PREMIÈRE.

RÉSISTANCE LATÉRALE DES BARREAUX CARRÉS.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	112	224	336	448	560	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	1,2	1,4	1,6	1,7	1,8	0,1
6	1,4	1,7	1,9	2,0	2,2	0,15
8	1,7	2,0	2,2	2,4	2,5	0,2
10	1,9	2,2	2,4	2,6	2,8	0,25
12	2,0	2,4	2,7	2,9	3,0	0,3
14	2,2	2,6	2,9	3,1	3,3	0,35
16	2,4	2,8	3,1	3,3	3,5	0,4
18	2,5	3,0	3,3	3,5	3,7	0,45
20	2,6	3,1	3,4	3,7	3,9	0,5
22	2,7	3,3	3,6	3,9	4,1	0,55
24	2,9	3,4	3,8	4,0	4,3	0,6
26	3,0	3,6	3,9	4,2	4,4	0,65
28	3,1	3,7	4,1	4,3	4,6	0,7
30	3,2	3,8	4,2	4,5	4,8	0,75
32	3,3	3,9	4,3	4,7	4,9	0,8
34	3,4	4,1	4,5	4,8	5,1	0,85
36	3,5	4,2	4,6	4,9	5,2	0,9
38	3,6	4,3	4,7	5,0	5,4	0,95
40	3,7	4,4	4,8	5,2	5,5	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	672	784	896	1008	1120	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1	0,1
6	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	0,15
8	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	0,2
10	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	0,25
12	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	0,3
14	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	0,35
16	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	0,4
18	3,9	4,1	4,2	4,3	4,4	0,45
20	4,1	4,2	4,4	4,5	4,7	0,5
22	4,3	4,4	4,6	4,7	4,9	0,55
24	4,5	4,6	4,8	4,9	5,2	0,6
26	4,6	4,8	5,0	5,1	5,3	0,65
28	4,8	5,0	5,2	5,3	5,4	0,7
30	5,0	5,2	5,4	5,5	5,7	0,75
32	5,1	5,4	5,6	5,7	5,9	0,8
34	5,3	5,5	5,7	5,9	6,0	0,85
36	5,4	5,7	5,9	6,0	6,2	0,9
38	5,6	5,9	6,0	6,2	6,4	0,95
40	5,8	6,0	6,2	6,4	6,5	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	1232	1344	1456	1568	1680	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	0,1
6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	0,15
8	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	0,2
10	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6	0,25
12	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	0,3
14	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3	0,35
16	4,3	4,4	4,4	4,5	4,6	0,4
18	4,5	4,7	4,7	4,8	4,9	0,45
20	4,8	4,9	4,9	5,0	5,2	0,5
22	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	0,55
24	5,3	5,3	5,4	5,6	5,6	0,6
26	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	0,65
28	5,6	5,7	5,9	6,0	6,1	0,7
30	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2	0,75
32	6,0	6,1	6,2	6,4	6,5	0,8
34	6,2	6,3	6,5	6,6	6,7	0,85
36	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	0,9
38	6,5	6,7	6,8	6,9	7,0	0,95
40	6,7	6,8	7,0	7,1	7,2	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	1792	1904	2016	2128	2240	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	0,1
6	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	0,15
8	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	0,2
10	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	0,25
12	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3	0,3
14	4,4	4,4	4,5	4,6	4,6	0,35
16	4,7	4,7	4,8	4,9	4,9	0,4
18	5,0	5,0	5,1	5,2	5,2	0,45
20	5,2	5,3	5,4	5,4	5,5	0,5
22	5,5	5,5	5,6	5,7	5,8	0,55
24	5,7	5,8	5,9	6,0	6,0	0,6
26	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	0,65
28	6,2	6,2	6,4	6,5	6,5	0,7
30	6,4	6,6	6,6	6,7	6,8	0,75
32	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	0,8
34	6,8	6,9	7,0	7,1	7,2	0,85
36	6,9	7,1	7,2	7,3	7,4	0,9
38	7,2	7,3	7,4	7,5	7,5	0,95
40	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	2800	3360	3920	4480	5600	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	2,6	2,8	2,9	2,9	3,1	0,1
6	3,3	3,4	3,5	3,5	3,8	0,15
8	3,7	3,9	4,0	4,1	4,4	0,2
10	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	0,25
12	4,5	4,7	4,9	5,1	5,5	0,3
14	4,9	5,1	5,3	5,5	5,8	0 35
16	5,2	5,5	5,7	5,9	6,2	0,4
18	5,5	5,8	6,0	6,2	6,6	0,45
20	5,8	6,1	6,3	6,5	6,9	0,5
22	6,1	6,4	6,7	6,8	7,3	0,55
24	6,4	6,7	6,9	7,2	7,6	0,6
26	6,6	7,0	7,2	7,6	7,9	0,65
28	6,9	7,2	7,5	7,7	8,2	0,7
30	7,2	7,5	7,7	8,0	8,5	0,75
32	7,4	7,7	8,0	8,3	8,8	0,8
34	7,6	8,0	8,2	8,5	9,0	0,85
36	7,8	8,2	8,5	8,7	9,3	0,9
38	8,0	8,4	8,7	9,0	9,6	0,95
40	8,2	8,6	8,9	9,2	9,8	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	6720	7840	8960	10080	11200	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	0,1
6	4,0	4,1	4,3	4,4	4,5	0,15
8	4,6	4,8	4,9	5,1	5,2	0,2
10	5,1	5,3	5,5	5,7	5,8	0,25
12	5,7	5,8	6,0	6,2	6,4	0,3
14	6,1	6,3	6,5	6,7	6,9	0,35
16	6,5	6,7	7,0	7,2	7,4	0,4
18	6,9	7,1	7,4	7,6	7,8	0,45
20	7,3	7,5	7,8	8,0	8,2	0,5
22	7,6	7,9	8,2	8,4	8,6	0,55
24	7,9	8,2	8,5	8,8	9,0	0,6
26	8,3	8,6	8,9	9,1	9,4	0,65
28	8,6	8,9	9,2	9,5	9,7	0,7
30	8,9	9,2	9,5	9,8	10,1	0,75
32	9,2	9,5	9,8	10,1	10,4	0,8
34	9,4	9,8	10,1	10,4	10,7	0,85
36	9,7	10,1	10,4	10,8	11,0	0,9
38	10,0	10,4	10,7	11,0	11,2	0,95
40	10,1	10,6	11,0	11,4	11,6	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	13440	15680	17920	20160	22400	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	3,9	4,0	....	....	....	0,1
6	4,7	4,9	5,1	5,2	5,3	0,15
8	5,5	5,7	5,9	6,0	6,2	0,2
10	6,1	6,3	6,6	6,8	6,9	0,25
12	6,7	6,9	7,2	7,4	7,6	0,3
14	7,2	7,5	7,8	8,0	8,2	0,35
16	7,7	8,0	8,3	8,5	8,8	0,4
18	8,2	8,5	8,8	9,0	9,3	0,45
20	8,6	8,9	9,3	9,5	9,8	0,5
22	9,0	9,4	9,7	10,0	10,3	0,55
24	9,4	9,8	10,1	10,4	10,7	0,6
26	9,8	10,2	10,6	10,9	11,2	0,65
28	10,2	10,6	10,9	11,3	11,6	0,7
30	10,5	11,0	11,3	11,7	12,0	0,75
32	10,9	11,3	11,7	12,0	12,4	0,8
34	11,2	11,7	12,0	12,4	12,8	0,85
36	11,5	12,0	12,4	12,8	13,1	0,9
38	11,9	12,3	12,8	13,1	13,5	0,95
40	12,1	12,7	13,1	13,5	13,8	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	24640	26880	29120	31360	33600	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	....	....	....	....	....	0,1
6	5,5	5,6	5,7	5,8	6,0	0,15
8	6,4	6,5	6,6	6,8	6,9	0,2
10	7,1	7,2	7,4	7,5	7,7	0,25
12	7,8	7,9	8,1	8,3	8,4	0,3
14	8,4	8,6	8,8	8,9	9,1	0,35
16	9,0	9,2	9,4	9,5	9,7	0,4
18	9,5	[illegible]7	9,9	10,1	10,3	0,45
20	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	0,5
22	10,5	10,8	11,0	11,1	11,4	0,55
24	11,0	11,2	11,5	11,7	11,9	0,6
26	11,5	11,7	11,9	12,1	12,3	0,65
28	11,9	12,1	12,4	12,6	12,8	0,7
30	12,3	12,5	12,8	13,0	13,2	0,75
32	12,7	13,0	13,2	13,4	13,7	0,8
34	13,1	13,4	13,6	13,8	14,1	0,85
36	13,5	13,7	14,0	14,2	14,5	0,9
38	13,8	14,1	14,4	14,6	14,9	0,95
40	14,2	14,5	14,7	15,0	15,3	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en barres.
	35840	38080	40320	42560	44800	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	....	....	....	....	....	0,1
6	....	....	....	....	....	0,15
8	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	0,2
10	7,8	7,9	8,0	8,1	8,2	0,25
12	8,5	8,7	8,8	8,9	9,0	0,3
14	9,2	9,4	9,5	9,6	9,7	0,35
16	9,8	10,0	10,1	10,3	10,4	0,4
18	10,4	10,6	10,8	[illegible]	11,0	0,45
20	11,0	11,2	11,3	11,5	11,6	0,5
22	11,5	11,7	11,9	12,0	12,2	0,55
24	12,0	12,2	12,4	12,6	12,7	0,6
26	12,5	12,7	12,9	13,1	13,2	0,65
28	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	0,7
30	13,5	13,7	13,9	14,1	14,2	0,75
32	13,9	14,1	14,3	14,5	14,7	0,8
34	14,3	14,5	14,7	15,0	15,1	0,85
36	14,7	14,9	15,1	15,4	15,6	0,9
38	15,1	15,4	15,6	15,8	16,0	0,95
40	15,5	15,8	16,0	16,2	16,4	1,0

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Longueur des barres.	POIDS SUPPORTÉS PAR LES BARRES.					Flèches en pouces.
	49280	53760	58240	62720	67200	
	ÉPAISSEURS DES BARRES.					
4	....	....	....	....	....	0,1
6	....	....	....	....	....	0,15
8	7,5	7,7	7,9	8,0	....	0,2
10	8,4	8,6	8,8	8,9	9,1	0,25
12	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	0,3
14	10,0	10,2	10,4	10,6	10,8	0,35
16	10,7	10,9	11,1	11,4	11,5	0,4
18	11,3	11,5	11,8	12,0	12,2	0,45
20	11,9	12,2	12,4	12,7	12,9	0.5
22	12,5	12,8	13,0	13,3	13,5	0,55
24	13,0	13,4	13,6	13,9	14,1	0,6
26	13,6	13,9	14,2	14,4	14,7	0,65
28	14,1	14,4	14,7	15,0	15,2	0,7
30	14,6	14,9	15,2	15,5	15,7	0,75
32	15,1	15,4	15,7	16,0	16,3	0,8
34	15,5	15,9	16,2	16,5	16,8	0,85
36	15,9	16,3	16,7	17,0	17,3	0,9
38	16,4	16,8	17,1	17,4	17,7	0,95
40	16,8	17,2	17,6	17,9	18,2	1,0

TABLE

Résistance des planches de fonte d'un pouce d'épaisseur à des

Long.	1 pied.		2 pieds.		3 pieds.		4 pieds.		5 pieds.	
Épaisseur verticale.	Poids, livres, av. du poids.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.
1	850	0,02	425	0,08	283	0,18	212	0,32	170	0,5
1,5	1912	0,014	956	0,053	637	0,12	477	0,21	383	0,33
2	....	.....	1700	0,04	1132	0,09	848	0,16	680	0,25
2,5	....	.....	2656	0,032	1769	0,072	1325	0,126	1062	0,2
3	....	.....	....	.....	2547	0,06	1908	0,11	1530	0,167
3,5	....	.....	....	.....	3467	0,052	2597	0,092	2082	0,143
4	....	.....	....	.....	....	.....	3392	0,08	2720	0,125
4,5	....	.....	....	.....	....	.....	4293	0,071	3442	0,111
5	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	4250	0,1
6	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	6120	0,083
7	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
8	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
9	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
10	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
11	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
12	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
13	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....
14	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....	....	.....

II.

forces agissant dans le sens de leur plus grande dimension.

6 pieds.		7 pieds.		8 pieds.		9 pieds.		10 pieds.		
Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Ép. en pouces.
142	0,72	121	0,98	106	1,28	95	1,62	85	2,0	1
320	0,48	273	0,65	239	0,85	214	1,08	192	1,34	1,5
568	0,36	484	0,49	425	0,64	380	0,81	340	1,0	2
887	0,29	756	0,39	662	0,51	594	0,65	531	0,8	2,5
1278	0,24	1089	0,33	954	0,426	855	0,54	765	0,66	3
1739	0,205	1482	0,28	1298	0,365	1164	0,46	1041	0,57	3,5
2272	0,18	1936	0,245	1700	0,32	1520	0,405	1360	0,5	4
2875	0,16	2450	0,217	2146	0,284	1924	0,36	1721	0,443	4,5
3560	0,144	3050	0,196	2650	0,256	2375	0,32	2125	0,4	5
5112	0,12	4356	0,163	3816	0,213	3420	0,27	3060	0,33	6
6958	0,103	5929	0,14	5194	0,183	4655	0,23	4165	0,29	7
9088	0,09	7744	0,123	6784	0,16	6080	0,203	5440	0,25	8
....	....	9801	0,109	8586	0,142	7695	0,18	6885	0,22	9
....	....	12100	0,098	10600	0,128	9500	0,162	8500	0,2	10
....	....	....	....	12826	0,117	11495	0,15	10285	0,182	11
....	....	....	....	15264	0,107	13680	0,135	12240	0,17	12
....	....	....	....	....	....	16100	0,125	14400	0,154	13
....	....	....	....	....	....	18600	0,115	16700	0,143	14

SUITE DE LA

Long.	12 pieds.		14 pieds.		16 pieds.		18 pieds.		20 pieds.	
Ép. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.
2	283	1,44	243	1,96	212	2,56	189	3,24	170	4,0
3	637	0,96	546	1,31	478	1,71	425	2,16	382	2,67
4	1133	0,72	971	0,98	849	1,28	755	1,62	680	2,08
5	1771	0,58	1518	0,78	1328	1,02	1180	1,29	1062	1,6
6	2548	0,48	2184	0,65	1912	0,85	1699	1,08	1530	1,34
7	3471	0,41	2975	0,58	2603	0,73	2314	0,93	2082	1,14
8	4532	0,36	3884	0,49	3396	0,64	3020	0,81	2720	1,00
9	5733	0,32	4914	0,44	4302	0,57	3825	0,72	3438	0,89
10	7083	0,288	6071	0,392	5312	0,512	4722	0,648	4256	0,8
11	8570	0,26	7346	0,36	6428	0,47	5714	0,59	5142	0,73
12	10192	0,24	8736	0,33	7648	0,43	9796	0,54	6120	0,67
13	11971	0,22	10260	0,307	8978	0,39	7980	0,49	7182	0,61
14	13883	0,21	11900	0,28	10412	0,36	9255	0,46	8330	0,57
15	15937	0,19	13660	0,26	11952	0,34	10624	0,43	9562	0,533
16	18128	0,18	15536	0,245	13584	0,32	12080	0,403	10880	0,5
17	20500	0,17	17500	0,23	15353	0,3	13647	0,38	12282	0,47
18	22932	0,16	19656	0,217	17208	0,284	15700	0,36	13752	0,442
19	25404	0,152	21800	0,207	19053	0,27	16935	0,34	15242	0,42
20	28332	0,144	24284	0,196	21248	0,25	18888	0,324	17000	0,4
21	31230	0,138	26770	0,186	23428	0,245	20825	0,31	18742	0,382
22	34500	0,131	29300	0,178	25712	0,235	22855	0,295	20570	0,365
23	37600	0,127	32000	0,17	28103	0,225	24980	0,282	22482	0,35
24	40768	0,12	34944	0,163	30592	0,216	27184	0,27	24880	0,335

TABLE II.

22 pieds.		24 pieds.		26 pieds.		28 pieds.		30 pieds.		
Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.	inflex. en pouces.	Poids en livres.
154	4,84	142	5,76	131	6,76	121	7,84	113	9,0	2
347	3,23	318	3,84	294	4,51	273	5,23	255	6,0	3
618	2,42	566	2,88	523	3,38	485	3,92	453	4,5	4
966	1,93	885	2,30	817	2,70	759	3,14	708	3,6	5
1390	1,61	1274	1,92	1176	2,25	1092	2,61	1019	3,0	6
1893	1,38	1735	1,65	1602	1,93	1487	2,24	1388	2,57	7
2472	1,21	2264	1,44	2092	1,69	1940	1,96	1812	2,25	8
3123	1,07	2862	1,28	2646	1,50	2457	1,74	2295	2,0	9
3863	0,968	3541	1,152	3269	1,352	3035	1,568	2833	1,8	10
4675	0,88	4285	1,05	3955	1,23	3673	1,425	3428	1,64	11
5560	0,81	5096	0,96	4704	1,13	4368	1,31	4076	1,5	12
6529	0,74	5985	0,886	5525	1,04	5130	1,21	4788	1,38	13
7573	0,69	6941	0,824	6048	0,965	5950	1,12	5553	1,28	14
8692	0,645	7967	0,75	7355	0,9	6829	1,03	6374	1,2	15
9888	0,63	9056	0,72	8368	0,84	7760	0,98	7248	1,13	16
11166	0,567	10325	0,673	9449	0,79	8773	0,92	8188	1,06	17
12492	0,54	11448	0,64	10584	0,75	9828	0,87	9180	1,0	18
13857	0,51	12702	0,607	11725	0,71	10887	0,825	10161	0,95	19
15452	0,484	14164	0,576	13076	0,676	12140	0,784	11332	0,9	20
17036	0,45	15618	0,55	14417	0,645	13387	0,75	12495	0,86	21
18700	0,44	17141	0,525	15823	0,615	14693	0,71	13713	0,815	22
20439	0,42	18735	0,5	17886	0,59	16059	0,68	14988	0,78	23
22210	0,402	20384	0,48	18816	0,565	17492	0,665	16304	0,75	24

TABLE

Résistance des piliers ou colonnes

Longueur en mètres.	0,609	1,219	1,828	2,438	3,047	3,656
Diamètres en millimèt.	Poids en quint. métr.	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*
25,4	8,17	5,45	3,63	2,32	1,42	1,01
38,0	18,86	16,35	12,43	8,36	6,55	6,09
50,7	37,0	32,70	27,27	22,29	18,67	16,25
63,4	58,50	55	49	43	38	33
76,1	83	80	73	65	57	49
88,8	116	112	105	97	89	79
101,4	152	148	141	131	120	108
114,1	194	189	181	171	159	145
127,0	240	235	226	216	204	191
152,2	276	275	269	259	249	236
177,6	470	459	450	439	436	418
202,8	609	604	596	584	571	553
228,3	782	777	768	757	743	724
253,9	966	961	952	940	926	905
279,3	1168	1159	1150	1137	1123	1083
304,7	1393	1387	1382	1373	1351	1331

III.

cylindriques à la pression verticale.

4,266	4,876	5,484	6,095	6,704	7,313
Id.	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*	*Id.*
1,01	0,51	0,51	0,51	......	......
4,57	4,06	3,56	3,05	2,04	2,04
13,19	10,19	8,53	7,01	6,00	4,99
28	24	20	17	14	12
42	35	29	24	20	16
71	60	53	46	40	34
97	86	76	67	59	52
132	119	107	96	85	75
154	139	126	112	99	38
222	208	193	179	165	152
399	379	359	337	317	297
533	513	490	467	443	420
703	682	658	632	618	594
883	841	825	798	772	741
106	1048	1023	1013	983	950
1316	1281	1256	1241	1211	1176

NOTE.

Les trois tables précédentes ont chacune un objet particulier : dans la première il est seulement question des barres carrées et de la pression qu'elles peuvent supporter pour ne pas atteindre une inflexion de plus d'un quarantième de pouce par chaque pied de longueur, ce qui équivaut environ à deux millièmes de la longueur totale. C'est donc à cette table qu'on devra avoir recours pour déterminer les proportions des assemblages de barreaux carrés soumis à une certaine pression : en effet une des conditions dans cette circonstance est de ne pas altérer les rapports de figure entre les différentes parties, et une trop grande inflexion produirait infailliblement cet effet, et compromettrait la durée et la grace de la construction. Cette table sert aussi à déterminer la plus grande section des barres carrées soumises à la loi d'égale résistance, et par suite à déterminer rigoureusement sa forme ; en outre, en l'appliquant de la manière que nous avons dite à la détermination des modules de résistance des planches de fonte, on obtient les proportions, sinon les plus économiques, du moins les plus sûres pour les pièces en fer à section oblongue qu'on pourrait vouloir employer dans l'architecture.

La seconde table est plus particulièrement propre aux constructions relatives aux transports sur les routes en fer : ici il s'agit effectivement de connaître l'effort maximum à supporter par les barres : en outre l'inflexion est indispensable à connaître pour apprécier la portion de force vive perdue pour les charriots par les descentes et montées continuelles produites ensuite de l'inflexion. Ainsi la table II donne à la fois le poids le

plus considérable et la plus grande inflexion que puissent supporter des barres de fonte de diverses dimensions.

Enfin la troisième traite de la résistance verticale des colonnes en fonte destinées à supporter des portions d'édifices ou des fardeaux de toute nature.

Ces tables sont faites par Tredgold pour la fonte seulement. Lorsqu'on voudra les appliquer à d'autres substances, il faudra avoir soin de multiplier les dimensions résistantes par de certaines constantes qui sont :

pour le fer forgé 0. 937
pour le chêne employé dans les constructions 1. 83
pour le sapin . . . . 1. 71.

lorsqu'on à recours à la première table ; lorsqu'on veut se servir de la seconde, ces constantes deviennent :

pour le fer forgé 1. 12
pour le chêne . . . . 4.
pour le sapin . . . . 3.

Enfin on obtiendrait les flèches de courbure de ces diverses substances en multipliant celle de la fonte :

pour le fer forgé par 0. 86
pour le chêne par 2. 08
pour le sapin par 2. 60.

Au reste ces diverses données quoique suffisantes peut être pour beaucoup de cas n'ont pas encore toute la généralité qu'on peut désirer.

Les circonstances plus favorables dans lesquelles la bienveillance d'un homme aussi éclairé qu'ami de tout ce qui est utile, Mr. le général d'artillerie Huguenin me plaçent, me font concevoir l'espérance de rendre plus tard quelque service à cette partie importante des arts de construction ; et je ferai en sorte de pouvoir encore en communiquer les résultats aux souscripteurs de cet ouvrage.

Voici d'ailleurs quelques exemples de l'emploi de ces tables : supposons (fig. 1, planche 12) qu'on veuille

déterminer les dimensions d'un ceintre destiné à supporter un toit. Admettons comme données que la largeur des ceintres soit de 24 pieds anglais, et qu'on veuille employer des sections carrées dans les divers compartimens de ces ceintres; supposons, comme il est assez d'habitude dans ce cas, que les dimensions latérales des sections soient de 2 1/2 pouces anglais, et que le toit porte par les trois points d'appui *a*, *b*, *c* sur le ceintre. Sopposons encore que le poids du toit soit P, et qu'il soit soutenu par N ceintres : chacun aura à supporter un poids égal à $\frac{P}{N}$, et comme la situation la plus défavorable serait pour le ceintre celle où ce poids serait tout entier placé au milieu, admettons cette hypothèse.

x étant l'inconnue bd, on aura évidemment pour le moment, de la résistance à la rupture une quantité de la forme.

$$K \times \frac{x}{2} \times \left[\frac{5}{2} \text{ pouces}\right]^2$$

et pour le moment de la tendance à la rupture

$$\frac{P}{N} \times 12 \text{ pieds}$$

ce qui donne pour l'équilibre.

$$K \times \frac{x}{2} \times \left[\frac{5}{2} \text{ pouces}\right]^2 = \frac{P}{N} \times 12 \text{ pieds}$$

et K sera la seule chose à déterminer pour connaître x. Or, K sera évidemment la résistance sur l'unité de surface pour un poids $\frac{P}{N}$ agissant sur une barre de 24 pieds de long; pour obtenir un résultat plus clair supposons que $\frac{P}{N}$ soit égal à 10 quintaux anglais ou 1120 livres.

Cherchez le côté correspondant à ces deux quantités dans la table 1ère. et vous trouverez vis-à-vis de 24 et au-dessous de 1120 la quantité, 5 2/10 pouces : vous trouverez alors K en observant qu'il est égal

à $$\frac{1120 \times 12 \text{ pieds,}}{\left[5 \text{ pouces} \frac{2}{10}\right]^3}$$

substituant cette valeur pour K dans l'équation précédente il vient

$$\frac{1120 \text{ ℔} \times 12 \text{ pieds}}{\left[5 \text{ pouces} \frac{2}{10}\right]^3} \times \frac{x}{2} \times \left[\frac{5}{2} \text{pouc.}\right]^2 = 1120 \times 12 \text{ pieds}$$

et $$\frac{x}{2} \times \frac{\left[\frac{5}{2} \text{ pouces}\right]^2}{\left[5 \text{ pouces} \frac{2}{10}\right]^3} = \left[5 \text{ pouces} \frac{2}{10}\right]$$

de là vous déduisez

$$x = \left[10 \text{ pouces} \frac{4}{10}\right] \times \left[\frac{52}{25}\right]^2 = 45 \text{ pouces.}$$

Ainsi la flèche du ceintre devra être de 45 pouces.

Dans le cas que nous venons de traiter on lie ordinairement les deux arcs de ceintre par une croix à laquelle on ajoute des contreforts latéraux. Cette croix et ces contreforts ne peuvent qu'augmenter la résistance, ainsi on pourra conserver la hauteur donnée par notre formule.

Quant à la forme du cintre elle s'obtiendra en décrivant deux arcs paraboliques *bc* F', *ba* F dont l'origine sera en F et F' et qui passeront par l'extrémité *b* de la flèche trouvée.

Dans tous les cas il faudra avoir soin d'ajouter la pesanteur du ceintre à celle du toit pour ne pas courir la chance de briser la construction sous son propre poids.

Supposons actuellement qu'il s'agisse d'un chemin en fer destiné à supporter des charriots en fonte dont le poids y compris la charge, peut aller à 10 milliers anglais : admettons qu'on veuille donner 6 pieds de longueur aux barres qui le composent et qu'on ne veuille pas une inflexion plus forte que de 1/5 de pouce.

Nous trouvons dans la colonne correspondante à 6 pieds dans la table n°. II, une inflexion de 0, 18 qui nous convient et vis-à-vis le nombre 2272 livres, avec une hauteur de 4 pouces. Pour que ces trois données nous servent j'employe l'analogie suivante, où x et y sont la largeur horizontale et la hauteur de la barre cherchée

$$\frac{x \times \frac{y^2}{2}}{10000} = \frac{\frac{4}{2} \times 4 \times 1}{2272.}$$

d'où je tire

$$x.\, y^2 = 16.\ \frac{10000}{2272.}$$

Ce qui me laisse encore une indétermination ; mais comme je puis disposer de la forme de ma barre je lui laisse la même proportion qu'à celle de la table, c'est-à dire que suppose $y = 4\,x$; alors j'ai

$$16\ x^3 = 16.\ \frac{10000}{2272}$$

ou $$x^3 = \frac{10000}{2272.}$$

d'où $$x = 1,66.\ \text{pouce.}$$

et $y = 6.64$ pouces

d'où il résulte que notre barre devra avoir 1 pouce et 66/100 d'épaisseur sur 6 et 64/100 de hauteur pour remplir la condition voulue.

Pour achever sa construction on lui donnera (fig. 2 planche 12) une forme résultante de celle de deux paraboles jointes ensemble comme on le voit, et dont les naissances soient au milieu du point d'appui en maçonnerie des barres qui forment le chemin.

Dans le cas dont je parle on aurait encore pu diminuer l'inflexion en augmentant la hauteur de la barre mais il faudrait alors ajouter des contreforts latéraux.

Supposons qu'il soit question de construire des supports pour l'artillerie, comme ceux qui servent à emmagasiner les canons (planche 12 fig. 3), on calculera le poids de chaque pièce et le nombre de celles qu'on peut mettre entre deux supports, et l'on se servira de la table n°. II comme précédemment; en ayant soin de se conformer à ce que nous avons dit dans la leçon précédente sur la forme des barres dans ce cas. La figure indique d'ailleurs la forme des barres et de leurs contreforts latéraux, que la difficulté des déplacemens et le danger des chocs obliques rend ici toujours nécessaires.

La troisième table enfin n'exige aucun exemple; il suffit de connaître les fardeaux à supporter et leur distribution pour s'en servir sans difficulté.

STATIQUE.

DIXIÈME LEÇON.

De la balance, de sa construction, de ses diverses variétés et de ses usages.

1. L'un des instrumens les plus simples et les plus usuels, c'est la balance. Cette machine dont l'emploi se reproduit dans presque toutes les transactions commerciales, est encore du plus haut intérêt dans une foule d'expériences imposantes et qui touchent de près les théories les plus délicates: elle est à la fois indispensable au chimiste, au physicien, au métallurgiste et au constructeur de machines. Sa théorie, comme vous allez le voir, n'offre rien de difficile, mais son exécution est au contraire une des parties les plus mal aisées de l'art du mécanicien.

La balance est en général considérée comme un levier du premier genre dont les bras sont tantôt de longueur égale, tantôt de longueur inégale. Dans le premier cas on l'appelle *balance* simple, dans le second on l'appelle *romaine :* dans tous les deux on nomme *fléau,* le levier qui supporte les puissances à ses extrémités.

2. Dans la balance simple on distingue (fig. 1, 2, 3, planche 11) AA le *fléau*, C le *couteau* ou le point de suspension, D l'aiguille du fléau, EE le *support*, F son point d'appui, I l'*index* B B, les bassins ou plateaux, A et A leur supports.

Dans tous les aspects que je vous présente ici, il vous sera facile de concevoir le système comme ramené à la figure 4, où le fleau est figuré par une droite inflexible AA, sollicitée par deux forces P et Q verticales appuyées en A et A, et soutenu par un cordon vertical au point fixe F.

La balance ordinaire étant destinée à composer des poids égaux, on devra avoir $Q = P$, d'où il suit par la théorie du levier

$$AC = A'C.$$

C'est-à-dire que la première condition à remplir pour que la balance soit en équilibre lorsque des poids égaux sont placés dans les bassins, c'est que les distances entre le couteau de suspension et ceux qui sont aux deux bras du fleau soient parfaitement égales.

Cette condition est une des plus difficiles à remplir; aussi arrive-t-il habituellement que les balances pèchent par l'omission de cette condition: il est même très-ordinaire de trouver des balances que la volonté des débitans plutôt que le hasard a entaché de ce défaut dans de basses et honteuses vues d'intérêt. Dans ce cas il est facile de voir

que l'équilibre ayant lieu, les poids qui le produisent seront inégaux. Car si l'on a, par exemple, $A'C = AC + \delta$ on aura dans l'hypothèse de l'équilibre

$$(AC + \delta) Q = AC \times P$$

d'où
$$P = \frac{AC + \delta}{AC} Q$$

et
$$P = Q + \frac{\delta}{AC} Q.$$

En sorte que le poids P sera plus grand que Q de toute la quantité $\frac{\delta}{AC}$ Q. D'après cela vous voyez que si l'on prend P pour Q il y aura erreur, et si Q est le poids de la marchandise vendue, on payera comme si elle pesait $Q + \frac{\delta}{A} Q$, c'est-à-dire plus que sa valeur. Il vous sera facile de voir sur un exemple particulier le résultat numérique de cette fraude.

Supposez, par exemple, que les bras du fléau soient l'un de six pouces l'autre de sept, celui-ci étant celui dans lequel on pèse la marchandise: supposons que le poids Q de cette dernière soit une livre, nous aurons pour le poids qui lui fait équilibre

$$P = 1 \text{ lb} + \frac{1}{6} \text{ lb}.$$

Ainsi on payera un sixième de livre, c'est-à-dire un peu plus de deux onces de trop.

Pour éviter cet inconvénient, on a établi des vérificateurs de mesures; ils doivent savoir comment s'y prendre pour vérifier la supercherie: voici le moyen qu'ils employent et qui est fort simple.

Après avoir équilibré les deux poids dans la balance, on les change de plateaux, et alors l'équilibre doit être rompu: en effet, si l'on a dans le premier cas

$$P \times AC = Q \times A'C$$

on aura
$$Q \times AC = P \times \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C}}$$

et
$$P \times A'C = P \times \frac{\overline{A'C}^2}{\overline{AC}}$$

Or il est visible que $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C}}$ et $\frac{\overline{A'C}^2}{\overline{AC}}$ ne sont pas égaux, donc $Q \times AC$ et $P \times A'C$ ne seront pas des produits égaux, et partant l'équilibre n'aura pas lieu, en changeant les poids; ainsi le vice de la balance sera démontré.

Quoi qu'il en soit, en cas de besoin, on peut se servir d'une balance défectueuse comme d'une autre pour trouver à peu près le poids d'un corps.

Soit, par exemple, le poids Q à connaître par la mauvaise balance. Mettons-le d'abord dans le pla-

teau B′, et appelons P le poids qui lui fait équilibre dans le plateau B, nous aurons

$$P \times AC = Q \times A'C.$$

Maintenant mettons-le dans le plateau B, et appellons P′ le poids qui, mis dans le plateau B′, lui fait alors équilibre, les bras du fléau n'étant pas changés en longueur; nous aurons alors

$$Q \times AC = P' \times A'C.$$

de là on tire

$$Q = P' \times \frac{A'C}{AC.}$$

Mais de la première pesée, on avait déduit

$$P \times AC = Q \times A'C$$

ou $$Q = P \times \frac{AC}{A'C.}$$

Si donc on multiplie terme à terme les deux équations qui donnent les valeurs de Q, on aura

$$Q \times Q \text{ ou } Q^2 = P \times P'$$

et $$Q = \sqrt{PP'}$$

C'est-à-dire qu'après avoir pesé le même corps dans des plateaux différens, il faut multiplier les poids fictifs obtenus, et prendre la racine quarrée de leur produit, ce qui donnera le poids véritable du corps.

Avec une théorie aussi simple et une combinaison de formes aussi peu compliquée en apparence, il est cependant peu d'instrumens dans lesquels il soit aussi difficile d'obtenir une grande exactitude réunie à la sensibilité nécessaire pour faire apercevoir les inégalités de poids dans les corps dont on veut comparer la pesanteur.

L'égalité la plus parfaite dans les bras du fléau, la pesanteur absolument égale de ces bras et des bassins de la balance sont trois premières conditions qui s'obtiennent difficilement, et auxquelles il faut joindre une disposition particulière de forme qui empêche la balance de *s'affoler*, c'est-à-dire de perdre la position à peu près horizontale de son fléau à la moindre inégalité dans les poids des corps suspendus aux bassins. Ces conditions deviennent encore plus exigibles et plus difficiles à remplir lorsque la balance, comme celle des essayeurs, des métallurgistes ou des chimistes, réclame la possibilité de faire reconnaître, si j'ose ainsi dire, des parcelles presque atomistiques des substances.

On obtient ces diverses conditions avec assez d'exactitude par divers procédés : presque chaque artiste a les siens, mais qui ont toujours plus ou moins d'analogie avec ceux des autres : j'entrerai à cet égard dans quelques détails pour ceux de vous qui pourraient avoir par la suite intention de construire eux-mêmes quelques-uns de ces utiles instrumens.

Après avoir donné au fléau de la balance la forme la plus symétrique possible par rapport à son centre, on perce en ce centre un trou cylindrique *abc* d'un petit diamètre et dont l'axe est perpendiculaire au plan apparent du fléau. On taille ensuite un cylindre d'acier d'un calibre exactement de la même dimension et destiné à être logé dans l'intérieur du trou cylindrique : aux deux bouts de ce cylindre on abat de l'acier de manière à former de chaque côté du fléau un couteau F, dont le tranchant, légèrement arrondi, reposera sur un plan d'agate *de* faisant partie du pied. Cet appareil a pour but de remplir la première condition, c'est-à-dire de mettre le fléau en équilibre de lui-même sur son support : on peut concevoir en effet que si le fléau est déjà fait avec un grand soin, et que le cylindre soit placé très-près du centre de gravité du fléau, le tout sera très-près d'être en équilibre. Il ne faudra donc qu'un léger mouvement du point de suspension à droite ou à gauche pour obtenir cet équilibre entièrement. Or, dans l'appareil que je viens de décrire, on obtient ce changement du point de suspension en faisant tourner au moyen d'une clef le cylindre *abc*, jusqu'à ce qu'on ait obtenu la condition désirée. D'autres fois, sans rendre le support mobile, on se contente d'obtenir l'équilibre en enlevant tantôt à l'un des bras, tantôt à l'autre, une portion de métal jusqu'à l'équilibre parfait.

On voit du premier coup-d'œil que pour éviter que dans cette opération le fléau ne se renverse, il faudra lui donner l'état d'équilibre stable, ce qui exige que son centre de gravité soit un peu au dessous du point de suspension *b*. On obtient quelquefois cette condition en plaçant autour de l'aiguille une vis à large tête *gh* (fig. 5 planche 11) qu'on fait descendre et monter suivant le besoin, pour faire descendre ou monter en même tems le centre de gravité : au moyen de cette vis on rend l'équilibre stable, et on parvient à disposer l'appareil de manière à ce qu'après un certain nombre d'oscillations le repos s'établisse et qu'alors l'aiguille reste parfaitement verticale.

Une fois cette importante condition remplie, il faut s'occuper des bassins de la balance et de leurs points de suspension : c'est la partie la plus difficile de la construction, et cependant la plus indispensable à soigner. On a proposé divers moyens pour arriver à une certaine exactitude ; ils se réduisent presque tous à rendre les supports des bassins mobiles dans le sens de la longueur du fléau, et de leur donner des poids absolument égaux. Alors on peut vérifier facilement si leur distance au centre de suspension est la même en leur attachant des poids parfaitement égaux et déjà pesés à une autre balance, ou bien en établissant l'équilibre pour deux corps et en les changeant ensuite de point d'appui, comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

J'ai vu employer avec assez de succès l'appareil de la figure 5 qui paraît assez simple, mais qui cependant exige beaucoup d'adresse et de précision dans l'ouvrier. On se sert aussi d'un moyen analogue à celui dont j'ai parlé pour la suspension.

Enfin il ne faut plus que donner aux bassins la même pesanteur, et c'est ce qui n'exige que de l'attention et de la patience.

Lorsque toutes les conditions sont ainsi remplies, on voit facilement que la balance tendra toujours à l'état d'équilibre stable, vu que son centre de gravité décrira toujours un arc de cercle au dessous de son point de suspension : ainsi quand elle sera soumise à l'action de poids un peu différents, elle ne se renversera pas brusquement, mais elle reviendra à l'équilibre après plusieurs oscillations, seulement la non-verticalité de l'aiguille indiquera l'inégalité des poids. Il faut observer qu'il y a encore des précautions à prendre dans la détermination de ce centre ; car s'il est trop loin de la suspension il s'opposera à laisser apercevoir de légères différences de pesanteur, et s'il en est trop près, au contraire, la balance sera toujours disposée à s'affoler.

Tout cela, comme vous le voyez, exige une patience, un coup-d'œil et une habitude extrêmes : aussi les bonnes balances sont-elles très-rares et souvent extrêmement chères. Les meilleures balances qui se fassent maintenant sont celles de Mr. Robinson de Londres, jeune artiste d'un grand

mérite. Néanmoins elles en peuvent guère évaluer les pesanteurs des corps au-delà d'un dix millième du poids total des corps à peser, ce qui, du reste, est déjà d'une grande exactitude.

Quelle que soit au reste la perfection d'un semblable instrument, l'adresse et l'habitude de s'en servir entrent encore pour beaucoup dans les résultats qu'on peut espérer d'en obtenir. On a imaginé un moyen fort ingénieux aussi de corriger les erreurs inséparables d'une construction vicieuse: c'est ce qu'on appelle la méthode des doubles pesées. Elle consiste à placer le corps dans un des bassins de la balance, puis à l'équilibrer au moyen de poussière métallique qu'on verse dans l'autre : quand l'équilibre est bien établi on enlève le corps, et on le remplace par des poids étalonnés ; il est visible que de cette manière on a exactement la pesanteur du corps, et qu'il ne reste que les erreurs dues à l'opération de la pesée.

Lorsqu'une balance après plusieurs oscillations arrive à l'état de repos, il est bon de frotter son pied ou le plateau en bois qui la supporte avec une lime; les vibrations qui résultent de là sont propres à remettre la balance en mouvement, et les résultats sont plus exacts.

On place enfin sous le fléau de la balance un double bras mobile, (fig. 1 planche 11) au moyen duquel on peut élever le fléau et enlever le couteau central de dessus ses supports, lorsque la

balance est rentrée; on peut aussi s'en servir dans le cours de l'opération pour empêcher la trop grande vibration du fléau, et le soutenir pendant qu'on place les corps à peser.

Toutes les précautions dont nous venons de parler doivent du plus au moins s'observer dans les balances plus communes. Néanmoins la plus grande partie d'entr'elles est en général négligée dans nos pays par ceux qui les fabriquent, comme leurs propriétés sont mal appréciées par ceux qui les achètent. Il serait bien à désirer sous ce rapport que nous puissions suivre l'exemple de l'Angleterre où ces utiles instruments sont construits avec un vrai luxe et une précision remarquable. Mais en cela, comme en bien d'autres choses, les consommateurs du continent resteront encore longtemps en arrière des Anglais, et cette cause de négligence et d'insouciance retardera aussi longtemps encore les progrès de plusieurs arts mécaniques que rien autrement ne nous empêcherait de cultiver avec le même succès que les Anglais.

Le plus souvent les balances sont suspendues par leur partie supérieure près de l'index; en Angleterre on en construit dont le point de suspension est au-dessous de la machine : on voit partout sur les places publiques et dans les marchés, de ces balances portées sur une plate-forme à quatre roues qu'on transporte facilement là où elles sont utiles.

Tout ce que je viens de vous dire sur la diffi-

culté de construire des balances simples doit suffire pour vous faire concevoir l'impossibilité de rendre exactes les romaines, et les autres modes de balance plus compliquées en principe que la balance simple avec un fléau symétrique, cependant comme les romaines surtout sont assez généralement employées dans un grand nombre d'usines et de magasins, il est bon de vous en dire quelques mots en passant.

Dans les balances ordinaires il faut un poids au moins égal à celui des corps que l'on peut avoir à peser habituellement, ce qui dans de certains cas devient embarrassant. L'objet de la romaine est d'éviter cette gêne, et de n'employer qu'un seul poids pour estimer le poids de corps de pesanteurs très-différentes. Le principe est fort simple et dépend de la théorie du levier.

Soit (planche 11 fig. 6) un levier suspendu en B au moyen d'un couteau comme celui de la balance ordinaire. Soit aussi au point de suspension A un corps P, et de l'autre côté un poids Q suspendu au moyen d'une glissière mobile qui lui permet de marcher le long du bras de levier BE.

Supposons ces deux poids en équilibre nous aurons

$$P \times AB = Q \times BC$$

d'après quoi, si l'on connaissait AB, BC et Q, on connaîtrait P en vertu de l'équation suivante :

$$P = Q \times \frac{BC}{AB}.$$

Supposons que l'on ait deux poids connus l'un de 50 kilogrammes et l'autre de 10, et admettons que le poids glisseur Q soit aussi de 10 kilogr. Suspendons d'abord le poids de 10 kilogrammes à la balance en A, et faisons marcher le poids Q jusqu'à ce qu'il lui fasse équilibre, ce qui arrivera, je suppose, quand il sera venu en D; faisons une marque en D, et écrivons que puisque l'équilibre a lieu en Q

$$Q : 10 \text{ k.} :: BD : AB.$$

Q étant aussi de 10 kilogrammes, cela veut dire que AB = BC; plaçons ensuite en A le poids de cinquante kilogrammes, il faudra pour lui faire équilibre faire glisser le poids Q jusqu'en E; marquons ce point E sur le levier, nous aurons

$$50 \text{ k.} : 10 \text{ k.} :: BE : AB$$

d'où $$BE = AB \times \frac{50}{10} = 5 . AB$$

tout cela étant fait, reprenons l'expression générale d'équilibre que nous avions tout à l'heure, savoir:

$$P = Q \times \frac{BC}{AB}$$

qui devient

$$P = 10 \text{ k.} \times \frac{BC}{AB};$$

BC tombant entre BD et BE on aura

$$BC = BD + a.$$

et $$P = 10 \text{ k.} + a'. \text{ kil.}$$

mettons cela dans l'expression de P on trouve

$$10 \text{ kil.} + a' \text{ kil.} = 10 \text{ k.} \frac{BD + a}{BD}$$

$$= 10 \text{ kil.} + 10 \text{ kil.} \frac{a}{BD} = 10 \text{ kil.} + 10 \text{ kil.} \frac{a}{\frac{1}{4}(BE-E)}$$

à cause que $BD = AB$ et que $AB = \frac{1}{4}(BE-BD)$

et par suite

$$a' \text{ kil.} = 10 \text{ kil.} \times \frac{a}{\frac{1}{4}(BE-BD)}$$

C'est-à-dire que l'excès de P sur 10 kilogrammes sera égal à autant de fois 10 kilogrammes que a contiendra de fois le quart de DE. Or a n'est autre chose que la longueur CD : donc si on divise DE en quatre parties, et qu'on écrive sur les divisions à partir de D, les chiffres 10, 20, 30, 40, 50, ce dernier étant en E, on aura les points où il faudra placer Q, pour faire équilibre à des poids P, de 10, 20, 30, 40 et 50 kilogrammes, et par conséquent pour les peser.

Ensuite et par la même raison il faudra diviser chacune de ces divisions en dix pour avoir les

kilogrammes simples, et la balance sera faite. On pourra même pousser plus loin ces divisions et obtenir des indications correspondantes aux dixièmes, aux centièmes de kilogrammes; mais il est aisé de voir combien de pareils instruments ne jouissent que d'une exactitude illusoire. En effet, indépendamment de toutes les causes d'erreur signalées dans la balance simple, on trouve ici celles qui dépendent de l'incertitude des divisions, de la mobilité du poids constant dont le support ne peut indiquer que d'une façon bien peu précise la longueur du bras de levier variable; et enfin, ce qui est pis encore, l'impossibilité de vérifier l'instrument et de s'assurer de sa justesse; car quand même le poids constant serait rigoureusement étalonné, le moindre choc, la plus petite tendance à la fraude peuvent déranger la distance du point de suspension de la balance à celui du corps à peser, et altérer par conséquent tous les rapports de longueur, si indispensables à conserver intacts pour pouvoir ajouter quelque foi aux résultats des pesées.

On a fait une modification intéressante de la balance romaine, afin de la rendre propre à l'estimation des pesanteurs spécifiques. Nous en parlerons plus tard, mais il semble que cet instrument plus commode qu'exact n'est guère propre à sa destination.

Il existe aussi une espèce particulière de ro-

maine dont je dois vous parler ici, parce qu'elle est employée dans un grand nombre de fabriques. C'est la balance dont les fileurs de coton ou de laine se servent pour estimer ce qu'ils appellent le numéro de leur fil.

Il sera bon d'indiquer d'abord ce que c'est que le numéro d'un fil. Si vous observez qu'un fil peut être considéré comme un cylindre à base circulaire, le carré de son diamètre multiplié par sa longueur pourra être considéré comme proportionnel à son volume et par conséquent à son poids. L'estimation du diamètre étant impossible à cause du défaut de micromètres assez convenables, et surtout à cause du diamètre variable du fil, on conçoit qu'il a fallu recourir au poids du fil sur une longueur donnée : ce poids divisé par la longueur étant proportionnel au carré du diamètre, il aurait fallu encore une extraction de racine quarrée pour déterminer ce dernier, et de pareilles opérations devenant gênantes par leur nombre chez des fabricans déjà occupés d'une foule de détails, on s'en tient au rapport du poids sur une longueur donnée, à cette longueur. C'est ce qu'on appelle le numéro du fil, et pour déterminer ce numéro ou ce rapport, on se sert de l'appareil suivant fort commode, et dans lequel vous reconnaîtrez facilement une romaine dont le bras de levier seul varie, tandis que le poids constant lui-même n'est que celui de l'indicateur.

Imaginez (planche 11 fig. 8) une roue ou poulie très-bien tournée, dont le centre est en C et autour de laquelle est enroulé un fil dont l'extrémité *b* supporte un bassin de balance ordinaire. Imaginez que l'axe *c* de la poulie supporte une aiguille *cd* dont le poids est égal à Q et dont le centre de gravité est en *g*. Il est visible que pour faire descendre le point *b* d'attache du bassin, il faudra soulever l'aiguille *cd*, ce qui ne pourra se faire sans faire monter en même tems le point *g*, centre de gravité de l'aiguille, et en même tems le poids de l'aiguille qu'on peut supposer fixé à ce centre de gravité. Supposons qu'en mettant un écheveau de coton d'un poids inconnu P sur la balance, on ait fait monter l'aiguille jusqu'en *cd* : l'équilibre étant ainsi établi, on aura en abaissant la perpendiculaire *gh* l'équation

$$Q + gh = (P + \delta)\, ca.$$

ca étant le rayon de la roue et δ le poids de la corde *ab* et du bassin *b*.

On tire de là :

$$P + \delta = \frac{Q}{ca} \times gh$$

et

$$P = \frac{Q}{ca} \times gh - \delta.$$

Supposons actuellement que le poids P étant ôté, l'aiguille descende seulement en *cd'* par l'action

du poids δ du bassin, on aura d'après cette équation

$$\delta = \frac{Q}{ca} \times g'h'.$$

$g'h'$ étant la perpendiculaire abaissée, dans cette hypothèse, du point g' nouvelle position du centre de gravité, sur la verticale ch.

Substituant cette expression dans la valeur de P on trouve

$$P = \frac{Q}{ca} \times gh - \frac{Q}{ca} \times g'h'$$

ou bien $P = \frac{Q}{ca} \times (gh - g'h')$.

D'après cela, si l'on connaissait gh et $g'h'$, on pourrait de suite déterminer P pour une situation connue de la machine; et ainsi il ne faudrait pour avoir cette détermination que le moyen de mesurer chaque fois gh et $g'h'$. Or c'est ce qui devient fort aisé par le procédé suivant:

Après avoir posé l'appareil bien verticalement, on marque exactement sur le cadran $d'e$ le point d' où l'extrémité de l'aiguille s'arrête lorsqu'il n'y a aucun poids sur la balance; ensuite on charge le bassin d'un poids plus considérable, par exemple d'un hectogramme; l'aiguille remonte alors et sa pointe vient se fixer par exemple en D, sur le même cadran. Alors on abaisse sur le diamètre ce

deux perpendiculaires $d'i'$ et DI, puis on divise la droite Ii' en autant de parties qu'on veut avoir de fractions mesurables dans un hectogramme. Ainsi, si l'on veut estimer les poids à moins d'un décagramme, on divisera comme dans la figure l'espace Ii' en dix parties égales : de chacune de ces divisions on élève des perpendiculaires jusqu'à leur rencontre avec le cadran, on marque sur les points de rencontre les numéros d'ordre 0, 1, 2, 3..........10, en commençant par le point d' et l'instrument est achevé.

Si vous voulez savoir comment on se sert de cet instrument, imaginez que le poids P inconnu, ait fait monter par exemple l'aiguille jusqu'en d à la division numerotée 6, nous aurons évidemment :

$$P = \frac{1^{\text{hectog.}}}{ca} \times (gh - g'h'.)$$

et il ne s'agit que de déterminer $(gh - g'h')$.

Pour cela imaginons la perpendiculaire di, et la perpendiculaire GH. Nous aurons évidemment d'après notre construction

$$ci = ci' + \frac{6}{10}\,(c\text{I} - ci')$$

et d'une autre part comme il est évident que GH,

gh, et $g'h'$ sont proportionnels à cI, ci et ci' on aura aussi

$$gh = g'h' + \frac{6}{10}\,(GH - g'h')$$

Substituez cette valeur dans l'expression de P et il vous viendra

$$P = \frac{1 \text{ hectog.}}{ca} \times g'h' - g'h' + \frac{6}{10}(GH - g'h')$$

$$= \frac{1 \text{ hectog.}}{ca} \times \frac{6}{10}(GH - g'h')$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{1 \text{ hectog.}}{ca}(GH - g'h').$$

Or que représente cette dernière valeur $\frac{1 \text{ hectog.}}{ca}$ $(GH - g'h')$? Il est évident que c'est le poids d'un hectogramme, puisque H est le point où doit arriver le centre de gravité de l'aiguille pour faire équilibre à 1 hectogramme placé dans la balance ; ainsi donc P pèsera les 6/10 d'un hectogramme ou 6 décagrammes, en sorte qu'on pourra lire le poids du corps sur la division ou cadran.

Tel est ce petit instrument dans lequel le corps à peser cherche pour ainsi dire lui-même l'expression de sa pesanteur, et qui par conséquent ne semble nécessiter aucune recherche ni peine de la part de la personne qui a besoin de s'en

servir. Il faut observer pourtant qu'il est sujet à un grand nombre de défectuosités. D'abord destiné, au moins en général, à peser des substances d'un poids peu considérable, la moindre irrégularité dans la coupe circulaire de la poulie peut altérer la précision des résultats; ensuite le poids du cordon qui s'allonge de plus en plus, devrait être défalqué du poids de la substance pesée, et c'est ce qui en général est impossible; enfin le frottement sur l'axe de rotation de la poulie est encore une cause d'erreur qu'on peut d'autant moins éviter qu'il faut augmenter le diamètre de l'axe à fur et mesure qu'on veut peser des corps plus considérables. Quoi qu'il en soit j'ai cru devoir vous en parler ici, parce que cet instrument fréquemment employé dans les fabriques, peut d'ailleurs vous être utile dans un grand nombre de cas où il ne s'agit que d'obtenir des approximations peu considérables.

Il y a enfin d'autres balances qu'on nomme en général *pesons*, et qu'on pourrait nommer mieux encore balances de réaction, parce que c'est à la réaction des corps élastiques, et particulièrement de ceux qu'on nomme *ressorts*, qu'on doit leur propriété de mesurer la pesanteur des corps.

Dans un corps parfaitement élastique on reconnaît en effet un caractère particulier très-propre à remplir ce but : il consiste en ce qu'un tel corps étant comprimé par l'action d'une force quelcon-

que P, perd sa forme, mais tend toujours à la reprendre en développant pour y revenir une force précisément égale à P : après quoi si on le comprime de nouveau de manière à lui faire reprendre exactement la forme comprimée dont nous avons parlé, quelle que soit la nature du pouvoir qui ait obtenu de nouveau ce changement de forme, il n'en aura pas moins fallu qu'il représente soit d'un coup, soit par ses actions successives l'équivalent exact de la force P.

Il n'existe à la vérité dans la nature aucun corps absolument élastique; cependant quelques-uns, du moins dans de certaines limites de compression ou d'extension, peuvent être considérés comme jouissant d'une élasticité à peu près parfaite : mais tous ne sont pas pour cela encore propres à faire des balances; l'acier paraît jouir des propriétés les plus convenables, et c'est aussi lui qu'on employe de préférence.

Le plus souvent on lui donne la forme d'un ressort courbe dont l'extrémité inférieure est solidement fixée à une plaque en fer, tandis que son extrémité supérieure peut être mise en mouvement et ne tient qu'à une tige verticale en fer, muni d'une crémaillère qui s'engage dans un pignon denté d'un très-petit diamètre fixé au centre de la plaque de fer et dont l'axe porte une aiguille. La plaque de fer porte en outre à sa partie supérieure un anneau destiné à suspendre

tout l'appareil, tandis qu'à la partie inférieure de la crémaillère est attaché un crochet qui sert à soutenir les corps que l'on désire peser.

Pour complèter l'instrument, on attache successivement à ce crochet des poids de 1, 2, 3, etc. kilogrammes ou hectogr., ou autre mesure de pesanteur, suivant le but et la grandeur de l'instrument : à chaque poids que l'on place ainsi, correspond une certaine inflexion du ressort, et une position déterminée de la crémaillère, du pignon et de l'aiguille. On marque sur le cadran la place de la pointe de cette dernière ainsi que l'indication du poids suspendu ; on répète cette opération jusqu'à ce que l'on ait atteint les limites du cadran, ou de la force de résistance du ressort, puis l'instrument se trouve achevé ; si l'on veut s'en servir pour trouver le poids d'un corps, on n'a alors qu'à suspendre ce corps au crochet inférieur et en le soulevant par l'anneau supérieur, le ressort s'infléchit, l'aiguille marche, et vient s'arrêter dans une des divisions du cadran qui indique de suite le poids du corps.

On a donné plusieurs formes différentes à ces utiles instrumens dont le peu de pesanteur et la commodité compense assez bien les petites causes d'erreur qu'ils renferment ; le plus soigné de tous et aussi l'un des plus usités a été construit par Regnier qui lui a donné le nom de dynamomètre, à cause de sa destination qui est de mesurer la

force développée à chaque instant par un moteur quelconque ; on peut le regarder comme une modification du peson indiqué ci-dessus. Seulement au lieu du ressort demi-circulaire, on employe un ressort elliptique fermé. Lorsqu'on veut s'en servir pour estimer des forces ou des poids peu considérables, on comprime le ressort dans le sens de son petit axe; on l'allonge au contraire dans le sens de son grand axe lorsqu'on veut estimer des forces ou des poids considérables : à chaque axe correspond une série de divisions particulières, et par là l'instrument jouit de la faculté de servir à peser dans un plus grand nombre de cas.

On a souvent l'occasion de peser des corps d'une grande masse et qu'il est fort difficile de soulever ; il en est même que l'on ne peut pas songer à soulever du tout, comme les lourds charriots qui fréquentent nos routes, et dont cependant il est indispensable dans beaucoup d'occasions de connaître le poids. On se sert alors de balances d'une nature particulière qu'on appelle balance ou pont à bascule.

Dans le cas où le poids n'est pas extrêmement considérable Mr. Prony a proposé un moyen fort ingénieux qui consiste à placer le corps sur un plan solide triangulaire, portant un anneau à chacun de ses angles, et reposant sur trois pointes correspondantes aux anneaux : au moyen d'un peson on soulève alors successivement chaque coin du triangle d'une très-petite quantité, et on note

l'indication de l'aiguille : ensuite on fait la somme de ces trois mesures et l'on a le poids entier du corps : ceci sort naturellement de ce que vous connaissez déjà très-bien, savoir que la résultante d'autant de forces qu'on le voudra parallèles entre elles est précisément égale à leur somme. Or il est visible ici qu'en soulevant le plateau d'une très-petite quantité on trouve à chaque angle la composante du poids qui correspond à cet angle. Ainsi la somme de ces trois composantes donnera la résultante totale ou le poids cherché.

Quant aux autres balances ou ponts à bascule, quelle que soit leur construction, elle a toujours pour but de peser un corps d'une grande masse au moyen d'une autre plus petite, ce qui offre deux avantages, le premier de ne pas exiger le déplacement et l'emploi de poids considérables, le second de n'exiger qu'un très-petit mouvement du corps pesé pour faire parcourir au poids équilibrant un assez grand espace, ce qui permet d'apercevoir facilement quand la condition d'équilibre est satisfaite : on remplit toutes ces conditions en disposant la bascule de telle manière que son plan ne puisse dans aucun mouvement cesser d'être horizontal, et que le poids qui doit faire l'équilibre ne puisse en même tems se mouvoir que dans une ligne verticale. Enfin on fait en sorte qu'à un mouvement uniforme du plan dans le sens vertical, réponde un mouvement aussi uniforme du poids,

et la bascule est alors terminée; on voit que c'est ici un cas de l'application du principe des vitesses virtuelles.

Je terminerai enfin tout ce que j'avais à dire sur les balances et les pesons par une dernière réflexion.

Nous avons vu que la force d'attraction de la terre suit la raison directe des masses et inverse des carrés des distances du centre du globe au centre des molécules attirées; en sorte que la force qui sollicite un élément de la matière vers le centre de la terre change et diminue avec la distance de cette molécule, en d'autres termes son poids varie avec sa distance de la surface du globe. Cependant si l'on transportait dans les deux bassins d'une balance deux corps équivalens en poids ils ne cesseraient point d'être en équilibre, à quelque hauteur d'ailleurs qu'ils fussent placés, ainsi on n'aurait aucune donnée sur le décroissement de la pesanteur par ce moyen.

Mais il n'en serait pas de même si l'on transportait à une certaine distance du centre de la terre un corps suspendu au crochet d'un peson; on verrait alors le poids indiqué par l'aiguille varier continuellement, et devenir toujours moindre : on aurait ainsi un moyen de reconnaître par expérience la loi de décroissement que nous vous avons fait connaître.

Ce procédé pourrait ensuite être utile pour re-

connaître les distances au centre de la terre de certains points de sa surface en y déterminant l'intensité de la pesanteur. Mais, comme il existe un moyen plus sûr dont nous aurons à parler plus tard, nous n'y insisterons pas davantage pour le moment.

STATIQUE.

ONZIÈME LEÇON.

Du tour ou treuil; du frottement sur les tourillons; du frottement sur la roue et l'arbre; de l'action due à la roideur et au frottement des cordes : modifications du tour.

1. Le tour ou treuil est un instrument de la plus grande utilité et dont les variétés ou modifications se représentent dans la composition de presque toutes les machines, surtout de celles qui servent à transporter, à mouvoir, ou enlever des fardeaux. Ses combinaisons avec le levier, le plan incliné et le coin fournissent en outre un grand nombre de machines simples ou d'outils du plus grand intérêt dans la plupart des arts mécaniques. Nous commencerons par le cas le plus simple.

Dans cet état on peut considérer le treuil comme l'assemblage solide et invariable de quatre cylindres concentriques à bases circulaires, mais de diamètres différens. Celui du plus grand diamètre (pl. 12 fig. 4) ADE a aussi généralement l'épaisseur la moins considérable : on le nomme la *roue* du tour : le cylindre B'B qu'on nomme l'***arbre*** du tour a

plus de longueur et moins de diamètre; enfin aux deux extrémités de ce dernier se trouvent les deux autres cylindres C et C' égaux entre eux, d'un diamètre plus petit que celui de l'arbre et destinés à fixer la position de l'axe de rotation avec l'aide de coussinets ou colliers (planche 12 fig. 5) dans lesquels ils s'emboitent exactement : on nomme ces derniers les *tourillons*.

Lorsqu'on veut faire servir le treuil à l'équilibre de deux forces P et Q, on a soin de fixer l'une par un cordon à la roue et l'autre aussi par un cordon à l'arbre du tour, ainsi qu'on le voit dans la fig. 4, de manière à ce que l'une des forces tende à faire tourner le treuil dans un sens, tandis que l'autre fait effort en sens contraire. Appelons P la puissance et Q la résistance, et supposons, ce qui, comme nous le savons, est toujours possible, que ces deux forces sont dues à la pesanteur.

Il n'y aura rien de plus aisé alors que de trouver les conditions d'équilibre des deux forces ; en effet si nous nous rappelons ce que nous avons déjà démontré plusieurs fois, il vous paraîtra naturel de faire mouvoir la machine, d'estimer les chemins parcourus et d'établir entre la puissance et la résistance, le rapport inverse de celui des espaces parcourus ; tout cela, comme vous allez le voir, devient extrêmement simple dans l'appareil dont il est question.

Soit pour cela, R le rayon de la roue, r le rayon

de l'arbre du treuil : faisons mouvoir la machine de manière à ce que le poids P, par exemple, descende en P', et que le poids Q monte en Q'; il est visible qu'alors le point A viendra se placer quelque part en A' et le point B quelque part en B', de manière à ce qu'on ait

$$AA' = PP', \; BB' = QQ'.$$

maintenant menons les droites AO et A'O, B*o* et B'*o*, nous aurons évidemment

$$\text{Angle } AoA' = \text{angle } BoB',$$

Car tous les points se mouvant en même temps dans la machine doivent décrire autour de l'axe de rotation des arcs correspondans à des valeurs angulaires égales.

D'après cela il est visible qu'on a

$$\frac{AA'}{AO} = \frac{BB'}{BO}$$

et comme AA' et BB' peuvent être représentés par PP' et QQ', tandis que AO et BO sont égaux l'un à R l'autre à r, l'égalité précédente deviendra

$$\frac{PP'}{R} = \frac{QQ'}{r}$$

or, pour que l'équilibre ait lieu il faut, comme nous venons de l'observer, que l'on ait

$$P \times PP' = Q \times QQ'$$

divisant donc cette égalité par la présente, il est visible qu'on obtient

$$P \times R = Q \times r$$

ou $$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}.$$

Ce qui veut dire que : ***pour que l'équilibre ait lieu, il faut que la puissance appliquée à la roue soit à la résistance appliquée à l'arbre comme le rayon de l'arbre est au rayon de la roue.***

Ce théorème prouve que dans le tour la puissance a toujours l'avantage sur la résistance, et que cet avantage est d'autant plus grand que le rayon de l'arbre est plus petit que celui de la roue. C'est ce qui d'ailleurs est presque évident au simple aspect de la machine.

Telle est la théorie extrêmement simple de cette commode machine dont nous verrons tout-à-l'heure les nombreuses applications. Réduite à la forme où je viens de vous la présenter elle ne sert guère que dans un petit nombre de cas : cependant on voit un exemple de ce genre de machine dans les moulins à farine et dans les magasins de grains, où le treuil sert à enlever les sacs pour les porter dans dès greniers ou les en descendre. Alors la roue du treuil est mise en action par une corde sans fin qu'une autre roue fait tourner, et elle communique ainsi son mouvement à l'axe de l'arbre autour duquel s'enroule la corde destinée à enlever le fardeau.

Malgré ce que je viens de dire, nous continuerons à examiner les diverses circonstances que présente la théorie de cette machine, parce que nous pourrons appliquer les conséquences que nous en déduirons à toutes les autres variétés du tour.

2. Occupons-nous d'abord de la charge des tourillons :

On conçoit que les deux forces P et Q en se faisant équilibre, n'en n'agissent pas moins sur le système de manière à produire une pression sur les deux coussinets, et il est utile de connaître cette pression, d'abord à cause de la détermination de la force à donner aux tourillons, ensuite pour pouvoir estimer quelle est la résistance que le frottement peut exercer contre le mouvement de la machine, ou l'influence qu'il peut avoir sur son équilibre.

Pour simplifier notre recherche, supposons qu'on ait fait passer un plan horizontal par l'axe du treuil, il coupera (planche 12, fig. 5) la roue du treuil suivant un rectangle A*a*, et l'arbre du treuil suivant un autre rectangle BB*bb*; tous les deux ayant pour axe commun de symétrie l'axe *cc'* du treuil : les forces P et Q se projetteront sur ce plan en deux points A et B, placés sur les côtés des parallélogrammes rectangles dont nous venons de parler : elles devront être considérées comme perpendiculaires au plan de la figure.

Joignons leurs points d'application par la droite

AB, cette droite coupera en *d* l'axe *cc* du treuil et nous aurons en menant les perpendiculaires A*o* et B*o*', l'équation

$$\frac{Ao}{AD} = \frac{Bo'}{DB.}$$

ou $$Bo' = Ao \times \frac{BD}{AD.}$$

Or, d'après ce que nous avons vu plus haut, on a pour l'équilibre la relation suivante entre P et Q :

$$\frac{P}{Q} = \frac{Bo'}{Ao},$$

d'après cela on trouve

$$\frac{P}{Q} = \frac{Ao \times \frac{BD}{AD}}{Ao} = \frac{BD}{AD.}$$

ou $$P \times AD = Q \times BD.$$

D'après cela on voit que la résultante des forces P et Q passe par le point D, d'où nous concluons que :

Lorsque deux forces P *et* Q, *parallèles entre elles et à la verticale se font équilibre au moyen d'un treuil, la résultante de ces deux forces passe par l'axe du treuil.*

Nous aurions pu, au lieu d'arriver à cette con-

clusion par le théorême d'équilibre, en partir pour trouver ce théorême : il nous aurait suffi, en effet, pour cela, d'observer que l'axe du treuil étant le seul élément immobile de la machine, il faut pour l'équilibre que la résultante de toutes les forces agissant sur le treuil vienne se détruire contre la résistance que cet axe oppose, et l'on aurait de suite trouvé le rapport des deux forces P et Q. Telles sont la généralité et la rigueur des principes mathématiques que quel que soit le point de départ du raisonnement, lorsqu'il est légitime, les conséquences auxquelles on arrive sont toujours identiques et ne présentent d'autres différences que la manière analytique dont elles sont exprimées. Ce n'est ni la première fois ni la dernière que nous aurons occasion de le remarquer, et je le ferai toujours d'autant plus volontiers que ces coïncidences de résultats doivent porter dans votre esprit la conviction de la bonté de la méthode, ce qui est le but principal que je me propose dans ces leçons.

La résultante des forces P et Q passant par le point D situé sur l'axe, pourra se décomposer en deux autres forces passant par les points d'appui c et c' et l'on aura, en appelant l'une de ces forces ou pressions, celle en c par exemple, p et l'autre p', on aura dis-je,

$$p = (P + Q) \times \frac{c'D}{cc'}$$

et $$p' = (P + Q) \times \frac{cD}{cc'}$$

d'après les formules que nous connaissons et en observant que la résultante des forces P et Q est égale à P + Q.

D'après cela on voit que la valeur des forces p p' varie avec la position de la force Q : comme on peut désirer de savoir quelle serait la plus grande valeur de l'une ou de l'autre, nous nous en occuperons en passant.

3. Soient m et m' les deux extrémités de l'axe de l'arbre, il est visible que le point c sera le plus chargé possible quand la force Q agira en B' sur la perpendiculaire à l'axe menée par m : or dans ce cas nous aurons pour déterminer le passage D' de la résultante, l'équation

$$\frac{mD'}{mo} = \frac{B'D'}{AB'} = \frac{P}{P+Q}$$

d'où $$mD' = \frac{P}{P+Q} \times mo.$$

Or $$mD' = cD' - mc$$

équation dans laquelle mc est une valeur constante ; on a donc

$$cD' - mc = \frac{P}{P+Q} \times mo$$

et $$cD' = mc + \frac{P}{P+Q} \times mo.$$

Maintenant la pression exercée sur le point C sera pour le cas dont nous parlons (2)

$$p = (P + Q) \times \frac{C'D'}{cc'} = (P + Q) \times \frac{cc' - CD'}{cc'}$$

ou en mettant pour CP' sa valeur

$$p = (P + Q) \times \frac{cc' - mc - \frac{P}{P + Q} \times mO}{cc'}$$

$$= \frac{(P + Q) \times C'm - P \times mO}{cc'}$$

$$= \frac{P \times C'O + Q \times c'm}{cc'}$$

C'est l'expression de la plus grande pression que pourra avoir à supporter le tourillon C, et par conséquent celle d'après laquelle on devra calculer la limite de sa résistance.

On trouvera de la même manière une formule semblable pour déterminer la pression que doit supporter le tourillon en c', et l'on saura par conséquent tout ce que l'on doit savoir pour leur donner la solidité requise en employant les formules et les nombres que nous avons donnés plus haut.

Si l'on voulait maintenant connaître l'influence du frottement sur l'équilibre du tour, il faudrait

se contenter d'observer qu'il ne peut y en avoir d'autre que celui produit par le contact de surfaces mobiles contre des surfaces immobiles : d'après cela il n'y aura de frottement qu'en c et c'.

Or ce frottement sera évidemment dû aux pressions exercées en c et c' par les composantes de la résultante des forces P et Q. Ces composantes, comme nous l'avons vu, étant

$$p = (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \times \frac{\mathrm{D}c'}{cc'}$$

et
$$p' = (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \times \frac{\mathrm{DC}}{cc'}$$

si l'on appelle ϕ le rapport du frottement à la pression et f et f' les frottemens produits respectivement en c et c', on aura évidemment

$$f = \phi.\ p = \phi. \times (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \times \frac{\mathrm{DC}'}{cc'}$$

et
$$f = \phi.\ p' = \phi. \times (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \times \frac{\mathrm{DC}'}{cc'}$$

ce qui donne de suite le frottement exercé en c et en c'.

Si l'on veut connaître l'influence de ces frottemens sur l'équilibre, on pourra considérer l'une des deux forces P et Q comme inconnue, et chercher à déterminer sa valeur par la méthode suivante.

Il est évident que les forces f et f' ne se mani-

festent que dans la tendance du système au mouvement. Or il y a deux manières de se mouvoir pour ce système : savoir se mouvoir dans le sens de la force P, ou dans le sens de la force Q : dans le premier cas, le frottement peut être considéré comme s'ajoutant à l'action de la force Q, dans le second il s'ajoute à celle de la force P; dans tous les deux, il agit comme le ferait une autre force tangentielle au treuil avec cette différence que cette action s'exerce sur le tourillon qu'on peut considérer comme un arbre de treuil d'un rayon différent de celui que nous avons déjà considéré.

Cela posé, prenons la première hypothèse, et rappelons-nous le principe des vitesses virtuelles: appelons R le rayon de la roue du treuil, r le rayon de l'arbre, ρ celui des tourillons : donnons ensuite un mouvement au système, et appelons A l'espace parcouru par le point d'application de la force P, a celui parcouru par le point d'application de la force Q, α celui enfin parcouru par le point d'application de la force f et par celui de la force f'.

Il est d'abord visible que A, a et α seront proportionnels aux rayons R, r et ρ, en sorte qu'on aura

$$\frac{A}{R} = \frac{a}{r} = \frac{\alpha}{\rho}$$

d'une autre part la valeur absolue des momens virtuels des forces P, Q, f, et f' sont

$$A.P,\ Q.a,\ f.\alpha,\ f'.\alpha$$

seulement si $A \times P$ a un signe positif les trois autres valeurs devront être négatives, et réciproquement, en sorte que la somme des momens des vitesses virtuelles sera toujours

$$\pm(P \times A - Q \times a - f \times \alpha - f' \times \alpha).$$

pour l'équilibre, cette somme devant être nulle, on a donc

$$P \times A - Q \times a - (f + f')\alpha = o.$$

Si ensuite on observe que $f + f'$ est égal à

$$\phi. \times (P + Q) \times \frac{DC'}{cc'} + \phi \times (P + Q) \times \frac{DC}{cc'}$$

$$\text{ou } \phi \times (P + Q) \times \frac{DC' + DC}{cc'} = \phi \times (P + Q)$$

on trouve pour la condition d'équilibre dans le cas où la force P tendrait à l'emporter sur Q

$$P \times A - Q \times a - \phi \times (P + Q) \times \alpha = o.$$

D'une autre part on a

$$\frac{A}{R} = \frac{a}{r} = \frac{\alpha}{\rho}$$

Appellant K la valeur de $\frac{A}{R}$, on trouve

$$\frac{A}{R} = K, \frac{a}{r} = K, \frac{\alpha}{\rho} = K$$

d'où

$$A = K.R, \alpha = K.\rho \text{ et } a = K.r$$

Ainsi au lieu de l'équation ci-dessus

$$P \times A - Q \times a - \phi \times (P + Q) \times \alpha = o$$

on trouve

$$K \times P \times R - K \times Q \times r - \phi \times K \times (P + Q) \times \alpha = o$$

ou en ôtant K

$$P \times R - Q \times r - \phi (P + Q) \rho = o,$$

ou enfin

$$P \times (R - \phi.\rho) = Q \times (r + \phi.\rho)$$

d'où l'on voit que le rapport de P à Q est dans ce cas

$$\frac{P}{Q} = \frac{r + \phi.\rho}{R - \phi.\rho}$$

au lieu d'être comme tout à l'heure égal à $\frac{r}{R}$.

D'après cela on voit que pour que le mouvement soit prêt à s'effectuer dans le sens de l'action de la force P, il faut rendre cette dernière plus considérable que lorsqu'on fait abstraction du frottement. C'est d'ailleurs ce qui est évident de soi-même.

Si l'on voulait que ce soit la force Q qui soit sur le point de l'emporter, il faudrait écrire

$$\frac{P}{Q} = \frac{r - \phi_{\backslash} \rho}{R + \phi . \rho}$$

ce qui exige au contraire que P soit moins grand que dans le cas de l'équilibre sans frottement : ainsi dans ce cas on peut soutenir un poids Q avec une force moins considérable que si le treuil était sans frottement.

4. Tout ce que nous venons de dire ressort du théorême des vitesses virtuelles placé dans le cas particulier où la somme des momens virtuels des forces peut être à volonté nulle ou négative.

En effet, on voit que le frottement agissant toujours en sens contraire de l'espace parcouru par le point frottant, le moment de ce frottement sera toujours négatif quel que soit celui des forces P et Q. Or ces deux derniers peuvent changer à la fois de signes, mais ils seront du reste toujours de signes contraires, ce qui mettra leur somme sous cette forme

$$\pm \text{ (P. K. R} - \text{P. K. } r\text{)}$$

tandis qu'en même tems le moment virtuel des frottemens produits sera toujours

$$- \quad (P + Q). K. \rho$$

d'où, dans l'acceptation la plus générale, la somme

des momens virtuels des forces qui agissent sur le système sera

$$\pm (P. K. R. - Q. K. r) - \phi. (P + Q). K. \rho$$

ou $$K \left\{ \pm (P. R - Q. r) \phi. (P + Q) . \rho \right\}$$

quantité qui ne contient d'autre variable que K qui est positive, et qui par conséquent étant une fois négative le sera toujours. Si donc on écrit d'abord qu'elle est nulle, ce qui se fait de deux manières, savoir :

1° $$P. R - Q. r = \phi. (P + Q). \rho$$

2° $$Q. r - P. R = \phi. (P + Q). \rho$$

et ce qui donne les deux équations limites déjà trouvées, on sera sûr que la somme des momens virtuels sera négative pour toutes les valeurs de P et de Q qui donneront à P. R — Q. r une grandeur comprise entre les deux limites ainsi obtenues: ainsi il y aura, avec l'influence du frottement, une infinité de manières d'établir l'équilibre du treuil.

Pour rendre ceci plus clair, supposons qu'on ne cherche que le rapport S des forces P et Q, et non leur grandeur absolue on aura à résoudre les équations

$$S. Q. R - Q. r = \phi. (S + 1) Q. \rho$$

et $$Q. r - S. Q. R = \phi. (S + 1) Q. \rho$$

d'où l'on tire pour la première

$$S.(R-r)\ R-r = \Phi.\ S.\rho + \Phi.\ \rho$$

ou $$S.\ (R-\Phi.\rho) = r + \Phi.\ \rho$$

et pour la seconde

$$S.\ (R+\Phi.\ \rho) = r - \Phi.\ \rho$$

et enfin les deux valeurs suivantes

$$S = \frac{P}{Q} = \frac{r-\Phi.\ \rho}{R+\Phi.\ \rho},$$

$$\text{et}\quad S' = \frac{P}{Q} = \frac{r+\Phi.\ \rho.}{R-\Phi.\ \rho.}$$

ayant ces deux valeurs de S, il est visible que toutes celles qui seront comprises entre ces deux limites rendront la somme des vitesses virtuelles nulle et par conséquent satisferont à la condition d'équilibre.

Or il est facile de voir que toute quantité comprise entre S et S′ sera de la forme

$$\frac{mS + nS'}{m+n}$$

ou $$\frac{m.\dfrac{(r-\Phi.\ \rho}{R+\Phi.\ \rho} + n.\dfrac{(r+\Phi.\ \rho}{R-\Phi.\ \rho}}{m+n}$$

ce qui équivaut à

$$\frac{R.r+\Phi^2.\rho^2}{R^2+\Phi^2.\rho^2} - \frac{m-n}{m+n} \times \frac{\Phi.\ \rho.\ (R+r)}{R^2-\Phi^2.\ \rho^2}$$

expression qui peut prendre une infinité de valeurs qui toutes donneront entre P et Q un rapport capable d'établir l'équilibre.

Je crois vous avoir exposé ici la vraie manière d'envisager la question du frottement dans ses rapports avec l'équilibre, et vous voyez, comme je vous l'ai déjà dit, que l'équation générale dont on se sert en mécanique est incomplète et ne peut servir comme la nôtre à la solution des problèmes relatifs aux phénomènes dans lesquels il se développe des forces ou résistances indépendantes de l'état intrinsèque du système, mais dérivant de ses rapports de position avec d'autres systèmes.

Revenons maintenant à l'examen de l'équation

$$\frac{P}{Q} = \frac{r + \phi.\delta}{R - \phi.\rho}$$

qui donne la valeur du rapport de P à Q lorsque P tend à donner le mouvement à la machine.

On voit que l'excès de grandeur de $\frac{P}{Q}$ sur $\frac{r}{R}$ dépend directement de la grandeur de ϕ et de ρ; ainsi donc *quand on voudra produire du mouvement au moyen d'un treuil, on aura d'autant plus à ajouter à la force qui ferait équilibre à la résistance qu'on doit vaincre, que les tourillons auront plus de rayon, et que leur surface produira plus de frottement sur les appuis.*

Voilà donc pourquoi on cherche toujours à

diminuer le diamètre des pivots dans toutes les machines tournantes, et aussi pourquoi on les polit souvent avec tant de soin : le diamètre rendu moindre diminue la quantité ρ et le poli diminue la quantité Φ. Vous voyez en outre que pour un diamètre de tourillons donné, et connaissant le métal ou la substance qui les compose ainsi que les coussinets, vous pourrez toujours déterminer Φ. ρ et par suite $\frac{P}{Q}$.

Vous voyez déjà ici l'origine d'une foule de moyens d'aider le mouvement, sans perdre autant de forces vives que par des frottemens directs.

Au nombre de ces moyens de diminuer le frottement, vous remarquerez celui qu'on emploie dans le transport des matériaux, ou des fardeaux d'une espèce quelconque sur des plans plus ou moins inclinés par rapport à l'horizon.

La machine la plus ancienne destinée à cet usage, a sans doute été le traîneau ordinaire : vous voyez encore employer, et même assez fréquemment, un appareil de cette nature, surtout lorsque des circonstances particulières ont diminué le frottement et aplani les inégalités du sol, comme dans les temps de neige et de gelée.

Cependant quelle que soit la façon d'un traîneau, il offre toujours de grandes résistances à la force motrice. On est parvenu à détruire une portion de ces résistances en plaçant au-dessous du traî-

neau des rouleaux qui servent à éviter une portion du frottement : tel est le moyen dont se servent souvent les maçons pour transporter les pierres de taille d'un volume un peu considérable.

Enfin on a construit l'appareil beaucoup plus parfait, connu sous le nom de voiture, et dont les modifications comprennent la charrette, la brouette, le cramion, le chien du mineur, etc.

Dans toutes ces machines ou modifications d'une même machine, le principal perfectionnement consiste dans l'emploi des *roues* : or il nous sera facile d'en apprécier les avantages.

Une roue est une circonférence percée d'un axe perpendiculaire à son plan : quelquefois ce plan est entièrement solide, quelquefois il est formé de l'assemblage de pièces qu'on nomme *jantes* et qui en forment le limbe ; ces jantes sont unies au moyen de *rayons* avec une pièce de bois nommé le *moyeu* et qui n'est qu'une surface de révolution : le tout est assuré par un ou plusieurs cercles de fer qui serrent le limbe du dehors et au dedans. Enfin le moyeu est lui-même percé d'un trou concentrique à son axe et dans lequel s'engage un segment de cone droit appellé l'*essieu*, autour duquel tourne toute la roue. On voit de suite l'avantage d'une telle disposition quant à la perte de force produite par le frottement ; car si r est le rayon de l'essieu et R celui de la roue, si est le rapport de la pression au frottement, et P

la charge de la voiture, on n'aura à ajouter à la force de traction que la quantité $\phi.\ P.\ \frac{r}{R}$ au lieu de la quantité $\phi.\ P$, qu'il faudrait y ajouter dans le cas d'un traîneau : d'après cela si la roue, par exemple, avait quatre pieds de diamètre et l'essieu deux pouces, le frottement serait évidemment $\phi.\ P \times \frac{2}{48}$ ou $\frac{1}{24}\ \phi.\ P$, c'est-à-dire la vingt-quatrième partie du frottement d'un traîneau chargé du même poids P. Cet avantage n'est pas le seul des machines dont nous venons de parler ; il en est d'autres dont j'aurai occasion de vous entretenir.

Dans tout ce qui précède nous avons traité la recherche de l'équilibre comme si les cordons sur lesquels agissent les forces étaient sans épaisseur, ce qui n'arrive jamais. Il est facile de voir que les cordes ayant une épaisseur ou diamètre égal à d, par exemple, c'est comme si leur axe était roulé autour d'un treuil du rayon $r + \frac{d}{2}$ et autour d'une roue du rayon $R + \frac{d}{2}$, en sorte que dans toutes les équations obtenues il faudra mettre $r + \frac{d}{2}$ et $R + \frac{d}{2}$ à la place de r et de R, et on aura la véritable condition d'équilibre.

Il faut en outre tenir compte de la roideur des cordes employées : cette nouvelle sorte de résis-

tance résulte de ce que quelque souplesse qu'on puisse supposer aux cordes, elles font néanmoins éprouver du ressort lorsqu'on veut les plier lorsqu'elles sont droites, ou les redresser lorsqu'elles sont ployées.

Coulomb, à qui l'on doit tant de recherches délicates et utiles, s'est occupé avec succès de ce genre de résistance : sans entrer dans des détails que nous aurons d'ailleurs occasion de placer dans un autre endroit, il a trouvé que l'on pouvait représenter la quantité dont il faudrait augmenter la force P pour être sur le point de l'emporter sur Q, de la quantité

$$\frac{r.}{R.}\ \frac{D^n}{r}\,(a + b.Q)$$

r étant le rayon de l'arbre du treuil, D le diamètre de la corde, a et b des constantes qu'on peut déterminer par l'expérience, et que Coulomb a trouvé être sous une force de traction Q de 100 livres :

Pour les cordes blanches

de 30 fils de caret	$\frac{D^n}{r}a = 4{,}2$ liv.,	$\frac{D^n}{r}a \times 100 = 9$ liv.
de 15 fils	$= 1{,}2$	$= 5{,}1$
de 6 fils	$= 0{,}2$	$= 2{,}2$

Et pour des cordes goudronnées

de 30 fils de caret	$\frac{D^n}{r}a = 6.6,$	$\frac{D^n}{r}a \times 100 = 11{,}6.$
de 15 fils	$= 2{,}0$	$= 5{,}6.$
de 6 fils	$= 0{,}4$	$= 2{,}4.$

D'après ces expériences on voit que les cordes goudronnées sont plus défavorables au mouvement que les cordes blanches : Coulomb trouve aussi que N est très à peu près égal à 2 pour les cordes neuves et se rapproche de l'unité pour les cordes déjà usées par le service.

Vous voyez qu'à l'aide de ce que nous venons de dire vous pourriez trouver la résistance de ces mêmes cordes pour un poids Q de toute autre grandeur que 100 livres, et par conséquent mesurer l'augmentation qu'il faut donner à P dans tous les cas possibles.

On parvient à multiplier l'effort du treuil en en combinant plusieurs de la manière suivante. Supposez (fig. 6 pl. 12) trois tours a, a', a''; sur la roue du premier agit une force P et sur l'arbre du dernier une résistance Q; l'arbre du treuil a et la roue du treuil a' sont enveloppées par une même courroie, qui empêche que l'arbre puisse tourner sans faire en même tems tourner la roue d'une même quantité : la même chose a lieu pour l'arbre du treuil a' et la roue du treuil a''. On demande dans ce cas les conditions d'équilibre entre P et Q.

Désignons par r et R les rayons de l'arbre du treuil a et de sa roue, par r' et R', r'' et R'' les mêmes choses dans les treuils a' et a''; donnons au système un petit mouvement, et supposons que les trois treuils aient pris dans ce mou-

vement une vitesse angulaire représentée par v dans le premier v' et v'' dans les autres. Il est visible d'abord que l'espace parcouru par les forces P et Q sera pour l'une $v.$ R et pour l'autre $v''.\ r''$, en sorte qu'on aura pour condition d'équilibre

$$v.\ R \times P = v''.\ r'' \times Q.$$

Il ne s'agit que de voir si l'on peut faire disparaître v et v''.

Or l'espace parcouru par un point de l'arbre du treuil a, sera le même que celui parcouru pendant le même tems par un point quelconque de la roue du treuil a' ; le premier espace est représenté par $v.\ r$, et le second par $v'.$ R′ : on doit donc avoir

$$v.\ r = V'.\ R'$$

d'une autre part en faisant le même raisonnement on trouvera

$$v'\ .\ r = v''\ R''$$

multipliant cette équation par la précédente, on trouve

$$v \times r \times v' \times r' = v' \times R' \times v'' \times R''$$

ou $$v \times r \times r' = v'' \times R' \times R''.$$

En divisant cette dernière équation par celle d'équilibre qui est

$$v\ .\ R\ .\ P\ . = v''.\ r''.\ Q$$

il vient

$$\frac{R \cdot P}{r \cdot r'} = \frac{r'' \cdot Q}{R' \cdot R''}$$

ou bien

$$P \times R \times R' \times R'' = Q \times r \times r' \times r''$$

d'où l'on déduit

$$\frac{P}{Q} = \frac{r \times r' \times r''}{R \times R' \times R''.} = \frac{r}{R} \times \frac{r'}{R'} \times \frac{r''}{R''}$$

Ce qui veut dire que le rapport entre la puissance et la résistance pour avoir l'équilibre s'obtient en faisant le produit des rapports des arbres des treuils aux roues de ces mêmes treuils, ou bien en divisant le produit des rayons des arbres des treuils par celui des rayons des roues.

On voit facilement combien un pareil système peut développer d'énergie : en effet, avec un poids de 4 livres, par exemple, et trois treuils égaux dont les arbres auraient chacun pour rayon la huitième partie du rayon de la roue, on pourrait faire équilibre à un poids Q égal à

$$4 \text{ livres} \times \frac{8}{1} \times \frac{8}{1} \times \frac{8}{1} = 2048 \text{ livres}$$

disproportion véritablement énorme.

Quand on veut faire entrer le frottement dans l'équilibre d'un système analogue au précédent, il faut avoir égard au frottement des cordes sur

la circonférence des roues et des arbres. Or, nous verrons, lorsqu'une corde ou un ruban enveloppe une circonférence *c a d*, en désignant par *t* sa tension, par A, l'arc qu'elle embrasse, par ϕ le rapport de la pression au frottement pour deux surfaces de la nature de celles de la corde et de la roue, que le frottement produit est

$$t \times \phi \times A.$$

D'où il suit, que l'on pourra savoir de suite si ce frottement est capable d'empêcher la roue du treuil de glisser dans la courroie sous l'influence de l'action de la force Q, condition indispensable sans laquelle la machine n'aurait aucun effet.

En vertu de la tension *t* on conçoit aussi que l'axe du treuil *a'* supporte une pression dans le sens du plan qui passe par cet axe et celui du treuil *a*. Nous verrons plus tard que cette pression est égale à $t \times cd$, *cd* étant la corde de l'arc embrassé par la courroie ou la corde.

Pour ce qui est des autres frottements et de la roideur des cordes, on se comportera comme pour le treuil simple, ainsi il ne vous restera aucune difficulté à vaincre dans le calcul d'un système de treuils pareil à celui décrit ci-dessus.

Ce mode de transmission de mouvement est employé dans plusieurs cas : vous l'aurez dû remarquer fréquemment dans le tour du tourneur, dans les grands ateliers où une seule machine à

vapeur sert de moteur commun à plusieurs tours; on s'en sert encore fréquemment dans les filatures de laine et de coton : dans la machine à vapeur même, c'est un système semblable qui fait marcher le régulateur à force centrifuge.

Dans la plupart de ces cas la poulie ou la roue qui reçoit la première ou la dernière l'action du moteur est accolée sur le même axe avec une poulie folle, c'est-à-dire une poulie qui tourne librement sur l'axe sans entraîner son mouvement: lorsqu'on veut faire cesser le mouvement on fait glisser la courroie sur la poulie folle, et le mouvement s'arrête ; on fait le contraire lorsqu'on veut le faire recommencer, et cette construction simple quoique ingénieuse suffit pour remplir à volonté et de suite l'une des deux conditions ci-dessus de repos ou de mouvement, sans pour cela s'occuper de la machine motrice qui reste toujours indépendante dans ses fonctions.

DES MODIFICATIONS DU TREUIL.

1°. *Des roues dentées et des engrenages.*

Ce que nous venons de dire conduit naturellement à la théorie des roues dentées. Supposons en effet qu'on ait rapproché les trois treuils $a\ a'\ a''$ de la figure 6, de manière à ce que la roue de chacun d'eux soit tangente à l'arbre de l'autre, (voyez planche 12, fig. 7) et qu'ensuite on ait armé la circonférence de chacune de ces roues et

de chacun des arbres de dents dont le nombre soit proportionnel à ces circonférences ; supposons en outre qu'on ait taillé ces dents de manière à ce qu'un mouvement uniforme de rotation étant donné au treuil a, il s'ensuive un mouvement de rotation également uniforme pour les treuils a' et a'' ; on voit facilement que tout ce qui avait lieu entre les trois treuils de la fig. 6, aura encore lieu pour ceux de la fig. 7, en sorte qu'en conservant les mêmes valeurs que tantôt aux mêmes lettres on aura encore

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \cdot \frac{r'}{R'} \cdot \frac{r''}{R''}.$$

Mais ici il se présente, lorsqu'on aperçoit la machine telle qu'elle est dans son emploi, une difficulté qui est d'estimer les rayons des roues, ou des cercles fictifs en contact, car vous voyez qu'ils ont disparu dans la figure : or nous avons dit que le nombre des dents de chaque roue devait être proportionnel à sa circonférence, et par suite à son rayon, ainsi appellant n, n', les nombres de dents des arbres des treuils a, a', et N', N'', ceux des dents des roues de ces treuils a' et a'' on aura

$$n = K.\ r,\ n' = K.\ r',$$

$$N' = K.\ R',\ R'' = K.\ R''$$

et par conséquent

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{n}{K} \cdot \frac{n'}{K} \cdot r''}{R \cdot \frac{N'}{K} \cdot \frac{N''}{K}} = \frac{n}{R} \cdot \frac{n'}{N'} \cdot \frac{r''}{N''}$$

tel est le moyen fort simple d'estimer le rapport de la puissance à la résistance, en comptant seulement le nombre des dents.

On est convenu, dans le cas dont nous venons de parler, de donner aux roues ainsi armées de dents le nom de *roues dentées* ou de *roues d'engrenage*, et aux arbres le nom de *pignons*. Ainsi donc le théorême précédent que nous venons d'écrire ainsi

$$\frac{P}{Q} = \frac{r''}{R} \cdot \frac{n}{N'} \cdot \frac{n'}{N''}$$

pourra se traduire de la manière suivante:

Lorsque deux forces sont mises en équilibre au moyen d'une série de roues intermédiaires dentées et de pignons, le rapport de la puissance P *à la résistance* Q, *est égal au rapport inverse des cylindres sur lesquels elles agissent, multiplié par les produits des nombres de dents des pignons et divisé par le produit des nombres de dents des roues.*

Vous voyez de suite combien on peut multiplier la puissance par une semblable machine, en augmentant le nombre des dents des roues et en diminuant celui des pignons, ou bien en augmen-

tant le nombre des unes et des autres. Cette théorie est trop simple pour nous arrêter plus longtemps. Nous ferons seulement quelques observations utiles à connaître.

La première condition pour qu'un système de roues dentées produise un effet convenable, c'est de construire avec soin les engrenages : il y a, pour y parvenir, plusieurs conditions à remplir et qu'on ne peut guère négliger sans amener de grands frottemens, ou sans exposer la machine à des secousses ou à des ruptures.

L'intervalle entre les deux dents d'une même roue doit être égal à la largeur de la dent. Ainsi lorsqu'on veut avoir trente-deux dents, par exemple, dans une roue, il faudra diviser sa circonférence en soixante-quatre parties égales et chaque valeur angulaire donnera l'étendue en largeur d'un creux ou d'une dent.

Pour achever la dent, on est d'usage de donner au creux une profondeur égale à la largeur de la dent, quelquefois seulement des deux tiers, et on conserve aux parois des dents dans le creux la figure d'un plan qui se dirige vers l'axe de rotation de la roue.

Enfin on arrondit la partie extérieure de la dent de manière à lui donner la forme d'une courbe nommée épicyclaïde : cette configuration est nécessaire pour donner à la dent la faculté de pousser la dent qui lui est opposée de manière à lui

donner une vitesse de rotation uniforme; ce qui est absolument essentiel. Le plus souvent on se borne à arrondir circulairement la dent, mais ce procédé n'est jamais aussi avantageux que l'autre.

Il y a avantage à multiplier le nombre des dents lorsqu'on veut obtenir des mouvements réguliers et doux; mais il y a alors aussi désavantage sous le rapport de la solidité: l'expérience et l'intelligence propre au mécanicien lui indiqueront facilement le milieu à garder.

Ce que nous avons dit des frottemens s'applique aussi aux engrenages. Leur surface doit être polie autant qu'il est possible, et avoir la plus grande régularité d'exécution: quand cela se peut faire, il est bon de faire les roues et les pignons de deux métaux différens : ainsi, dans les montres, qui sont des machines à engrenage très-compliquées, tous les pignons sont en acier et les roues en cuivre.

Un caractère de mauvais augure pour des engrenages, c'est de faire du bruit en marchant; ce bruit provient du dégagement brusque des dents qu'une mauvaise courbure tient dans une situation forcée et qui s'échappent en frappant sur les dents de l'autre roue. On a quelquefois remplacé dans des engrenages les dents en métal par des dents en bois, sans songer qu'on n'évite par là que le bruit, et qu'à moins de donner aux dents leur courbure nécessaire, la substance dont

on les compose est de peu d'influence sur cette espèce de défectuosité.

De quelque manière, au reste, qu'on employe les engrenages, les frottemens considérables qui en résultent, en font un des plus mauvais organes moteurs. C'est donc bien à tort que quelques mécaniciens les prodiguent dans leurs constructions, croyant par là gagner de la force, comme ils le disent du moins : au lieu de gagner de la force ils ne font réellement qu'en perdre par des frottemens, des vibrations, des chocs, toutes causes de destruction des forces motrices. Les Anglais, plus avancés que nous en mécanique, ne les employent que le moins possible, et c'est une chose dans laquelle ils ont la plus grande raison. Il y a néanmoins des cas où il est difficile de s'en passer.

Les engrenages dont je viens de parler ne communiquent le mouvement qu'à des axes parallèles entre eux; on peut avoir besoin de faire marcher l'un par l'autre des axes non parallèles, et pour cela on employe les *engrenages coniques* ou *roues d'angle*, qui exigent seulement que les axes de rotation se rencontrent : quand cette dernière condition n'est pas remplie, on est obligé d'employer un troisième axe qui passe par les deux premiers, et qu'on employe à communiquer à l'un des deux le mouvement qu'il reçoit de l'autre.

La taille de ces engrenages est encore plus diffi-

cile que celle des engrenages plans, à cause de la forme conique des dents, et de la courbure epicycloïdale de la base de ces cônes : la description de leur tracé m'entraînerait trop loin, et ne serait pas d'une grande utilité pour vous à cause de la complication des idées géométriques sur lesquelles elle repose.

Dans la plupart des établissemens, d'ailleurs, il se trouve toujours quelqu'un chargé de surveiller l'exécution des engrenages : les autres n'ont qu'à se régler sur ses indications. Pour les ouvrages petits et soignés, on se sert en outre d'une machine fort ingénieuse qu'on appelle *plate-forme*, et qui peut être employée à tailler les dents des roues plates et des roues d'angles à volonté. Il y a de ces plate-formes qui ont en outre un appareil propre à arrondir les dents en épicycloïdes, en sorte que le travail géométrique si compliqué dont je vous ai parlé devient l'ouvrage d'une machine aveugle, et pourtant capable de remplacer avec avantage l'œil, la main et la pensée d'un ouvrier géomètre, comme si elle s'était emparé de ses sens et de son intelligence.

Il y a encore d'autres espèces d'engrenages dont il est essentiel de vous parler; ce sont les lanternes qu'on employe maintenant moins qu'autrefois, mais qu'on rencontre néanmoins encore, surtout dans les moulins à farine et dans les manéges.

Une lanterne n'est autre chose que l'assemblage

de deux plateaux circulaires sur un axe de rotation qu'on appelle arbre de la lanterne; les plateaux sont percés de trous dans lesquels on loge d'autres cylindres d'un petit diamètre, placés à égale distance les uns des autres, et parallèles à l'axe de rotation de la lanterne. Ces cylindres qu'on nomme *fuseaux* de la lanterne, s'engagent dans les dents d'une roue d'engrenage qui fait marcher la lanterne. Quelquefois, comme dans les manéges, la roue d'engrenage a son plan parallèle à l'axe de rotation de la lanterne; d'autres fois, comme dans les moulins, elle est dans un plan perpendiculaire à cet axe. Dans les deux cas les rapports de vitesse se calculent d'après le nombre des dents et celui des fuseaux, la lanterne jouant ici le rôle de pignon. Il ne sera pas difficile, d'après ce que nous avons vu, de faire entrer dans le calcul des forces équilibrantes, ces deux nombres avec les diverses modifications produites par les frottemens.

Les engrenages correspondans aux fuseaux doivent être encore travaillés avec plus de précision que les autres : du reste la construction de leur courbure est du même ordre de difficulté que celle des autres engrenages. On rencontre quelquefois, mais très-rarement, des lanternes à fuseaux coniques, et qui sont coniques elles-mêmes. Ces lanternes qui servent à changer la direction du mouvement remplacent les engrenages coniques ou les roues d'angles : en total ils sont aussi vicieux que les autres.

Enfin quelquefois on communique le mouvement à deux roues en les mettant en rapport au moyen d'une chaîne qui embrasse leurs deux circonférences à la fois. Ces chaînes ont diverses formes ainsi que la circonférence des roues; mais le tout est disposé de manière à ce que leurs parties saillantes correspondent aux parties rentrantes de la circonférence de la roue. La plus simple et peut-être la meilleure de toutes ces chaînes est celle qui porte le nom de *chaîne de Vaucanson*, parce qu'elle a été imaginée par ce célèbre mécanicien. Elle est composée d'anneaux en fer à cheval qui s'engagent les uns dans les autres, et déterminent le mouvement des roues, en tirant leurs dents dans un sens donné. Cette chaîne a l'avantage de pouvoir agir sur toutes les espèces de roues dentées.

Enfin on employe souvent les roues dentées à donner un mouvement de translation rectiligne à des barres solides en métal, également dentées : on nomme ces barres *crémaillères*; un tour entier de la roue fait marcher la crémaillère d'une longueur égale à sa circonférence; ainsi on pourra connaître facilement les vitesses relatives de deux points placés l'un sur la roue, l'autre sur la crémaillère, et par conséquent les conditions d'équilibre de deux forces appliquées à ces points; on pourra également estimer ces vitesses relatives par le compte fait des dents de la roue. Ceci me conduit naturellement à vous parler d'une machine

très-simple, très-connue et très-utile, dont la théorie ressort tout entière de ce que nous venons de voir. C'est le *Cric*. (Planche 12, fig, 8).

Le cric consiste principalement en une forte barre en fer forgé BB, dentée sur une certaine longueur : cette barre s'engage dans le pignon P qui fait corps avec la roue R, laquelle engrène à son tour avec le pignon P' auquel est attachée une manivelle *a b*. A l'extrémité de la barre se trouve une espèce de fourche ou de corne double qui peut-être a fait donner à l'instrument le nom populaire de ***diable*** sous lequel il est assez généralement connu. La barre BB est fortement encaissée dans un épais madrier garni de fer dans divers endroits et terminé par deux pointes à la partie inférieure, lesquelles servent à maintenir l'instrument sur le sol lorsqu'on veut produire quelqu'effort. On pose alors l'instrument entre l'obstacle qu'on veut soulever et un point d'appui fixe, et l'on fait marcher la manivelle de manière à faire avancer la barre B B dans le sens du mouvement qu'on veut imprimer à l'obstacle.

Si vous voulez calculer la force développée par un pareil instrument, supposez une puissance P appliquée en *a* et une résistance Q appliquée en A. Admettez ensuite qu'on ait donné un mouvement à la machine et cherchez les espaces parcourus en même temps par le point *a* et le point A.

Pour cela, soit ρ' le rayon de la manivelle, r'

celui du pignon P′, ρ le rayon de la roue R et r celui du pignon P, la vitesse du point a et celle d'un point quelconque de la crémaillère (laquelle sera évidemment la même que celle d'un quelconque des points de la circonférence du pignon P) ces vitesses, dis-je, seront entre elles comme $\rho\rho'$ et rr'; d'où il suit que l'on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{r\,r'}{\rho\,\rho'}.$$

Ainsi supposez les deux pignons chacun de trois pouces de diamètre, la manivelle de 9 pouces et la roue R de 8 pouces de diamètre, vous aurez

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}{9\cdot 4} = \frac{9\cdot}{9\cdot 4\cdot 4} = \frac{1}{16}$$

et Q sera égal à 16 P.

Si donc on suppose que la pièce est manœuvrée par un homme auquel on peut attribuer la faculté de presser la manivelle avec une force d'environ 25 kilogrammes, la force Q à laquelle il pourra faire équilibre avec le cric sera de 400 kilogrammes. Ordinairement on donne seulement deux pouces aux pignons, et 10 à la manivelle; cela donne alors pour la force Q produite par un homme la quantité 10. 4. 25 kilog. ou 1000 kilo-

grammes; force considérable et avec laquelle on peut obtenir de grands effets. *

2° *Combinaisons du treuil et du levier ; treuil à manivelle, cabestan, manége, grues, chèvres, roue à cheville*, etc.

Le tour, tel que nous l'avons envisagé, ne paraît guère propre qu'à un petit nombre d'emplois. Lorsque l'on veut l'employer dans les constructions, on lui donne d'autres dispositions; mais le plus grand nombre repose sur les combinaisons avec le levier.

Le *treuil à manivelle* qu'on employe dans les puits de mines de peu de profondeur, n'est autre chose qu'un treuil ordinaire sans roue. Seulement aux deux extrémités de son axe sont placés deux leviers coudés qu'on nomme manivelles. La partie

* Pendant que j'étais encore employé aux travaux du génie militaire, il fut question de placer sous le magasin en bois des affûts de la place de Venlo un soubassement en pierres de taille, pour prévenir l'effet des eaux qui s'accumulaient tout l'hiver autour de ce magasin, et pour rehausser la toiture de 4 pieds. Le génie estima qu'il faudrait démolir tout le magasin pour le reconstruire ensuite : rien du reste n'étant stipulé à l'égard du mode d'opération de l'entrepreneur, celui-ci, homme intelligent, imagina de se servir de crics, et avec quelques précautions fort peu couteuses, il suspendit en l'air le bâtiment au-dessous duquel il plaça la maçonnerie voulue, et qui se trouva du même coup élevé sans presque de frais à la hauteur requise.

de la manivelle qui est parallèle à l'axe de rotation a une longueur d'autant plus considérable qu'on a plus de monde à y employer. La condition d'équilibre est écrite pour ce treuil ainsi qu'il suit :

La puissance est à la résistance comme le rayon de l'arbre du treuil est au rayon du cercle décrit par le manche de la manivelle.

Le *cabestan* est un treuil vertical, fortement assujetti par une charpente, et traversé à sa partie supérieure par quatre leviers d'une longueur plus ou moins considérable. La résistance est attachée à une corde qui s'enroule autour du treuil, et la puissance consiste en hommes appliqués aux bras de levier : ici le rapport entre la puissance et la résistance dépend de la position des manœuvres par rapport au bras de levier. Supposons donc trois hommes à chaque levier, l'un à 2 mètres de l'axe du treuil, l'autre à 3 mètres, et le troisième à 4; admettons ensuite que l'arbre du treuil ait 30 centimètres de diamètre, on aura pour le rapport de la puissance à la résistance, en appelant q la résistance vaincue par le premier homme, q' celle vaincue par le second, et q'' celle vaincue par le troisième, p la puissance produite par chacun et Q la résistance totale

$$\frac{p}{Q} = \frac{p}{q + q' + q''}.$$

Or on a évidemment comme pour le treuil à manivelle

$$\frac{p}{q} = \frac{0,15}{2}, \quad \frac{p}{q'} = \frac{0,15}{3}, \quad \frac{p}{q''} = \frac{0,15}{4}$$

d'où $q = \frac{2}{0,15} \cdot p, \; q' = \frac{3}{0,15} \cdot p, \; q'' = \frac{4}{0,15} \cdot p$

et par conséquent

$$\frac{p}{Q} = \frac{p}{p} \times \frac{1}{\frac{2}{0,15} + \frac{3}{0,15} + \frac{4}{0,15}}$$

$$= \frac{0,15}{2+3+4} = \frac{0,15}{9}.$$

d'où l'on tire $Q = 60\,p$; et comme il y a quatre leviers on doit encore quadrupler cette valeur, ce qui donne

$$Q = 240\ p.$$

Ainsi dans ce cas la machine représente la force de 240 hommes, c'est-à-dire vingt fois le nombre des ouvriers employés.

Telle est la théorie du cabestan dont l'utilité est si grande dans la marine, et que l'on employe encore dans beaucoup d'autres circonstances, par exemple pour manœuvrer les portes des grandes écluses, pour enlever au moyen de poulies de renvoi des fardeaux considérables, et pour ôter les corps de pompes endommagés du fond des puits de mines.

Le *manége* n'est autre chose qu'un grand cabestan à quatre leviers; seulement au lieu d'hommes appliqués au levier on y met des chevaux. Le fardeau est enlevé par une corde qui s'enroule sur un arbre creux qu'on nomme *tambour*, et auquel on donne quelquefois la forme d'un hyperboloïde de révolution : la corde quitte ce tambour pour aller passer sur des poulies de renvoi qui changent sa direction d'horizontale en verticale.

Le treuil vertical ne tourne pas sur des tourillons mais sur des *crapaudines*, espèce d'axe verticaux qui tantôt font corps avec l'arbre et tantôt font partie de la portion immobile de l'appareil.

Le manége dont nous venons de parler se trouve fréquemment employé dans les mines pour enlever le minérai, et dans les fabriques d'étoffes pour y faire marcher les diverses machines régulatrices qui s'y trouvent.

La roue à cheville, celles dans lesquelles des animaux montent pour produire du mouvement, et toutes les autres semblables ne sont que des treuils horizontaux dans lesquels le poids de l'animal remplace la force P. La résistance agit aussi assez habituellement dans la verticale ; ainsi cette espèce rentre absolument dans le cas du premier treuil dont nous avons traité.

La *chèvre* est une combinaison de la poulie et du treuil. Deux fortes pièces de bois liées ensemble à leur extrémité supportent une poulie ou quel-

quefois un moufle; la corde de la poulie ou du moufle vient s'enrouler sur un cabestan horizontal, fixé par ses tourillons dans les deux pièces dont nous venons de parler. Pour faire marcher la machine, un homme s'appuye au levier, et le fait descendre par son poids, ainsi sans même un long bras de levier vous concevez facilement la possibilité de produire un grand effort. Cette machine est fréquemment employée dans les constructions civiles.

La *grue*, ainsi appellée à cause de la forme singulière qu'on lui donnait autrefois est en général la combinaison d'un treuil horizontal et d'un treuil vertical; la chaîne qui s'enroule sur le treuil horizontal passe sur la gorge d'une poulie fixée à l'extrémité du cou de la grue, et à l'aide du treuil sert à enlever le fardeau qu'on y accroche, Alors au moyen du treuil vertical on fait tourner tout ce système, et l'on dépose le fardeau enlevé dans l'endroit qu'on juge convenable.

La grue est du plus grand usage pour charger et décharger les bâtiments de mer; aussi est-ce dans les ports qu'on la voit le plus fréquemment employée.

Quoique fondées sur un même principe, les grues ont différentes dispositions dans les divers pays. On en voit dans lesquelles le fardeau est enlevé au moyen d'un roue à cheville : dans d'autres c'est un système plus ou moins compliqué

d'engrénages qui remplace cette roue : dans d'autres encore c'est un simple levier sollicité par un cabestan, et tout le système est mobile autour d'un axe vertical de rotation : quelques-unes enfin sont une complication du treuil et de l'excentrique comme celle que j'ai vu nouvellement employer en Angleterre, et qui me paraît la plus simple, la plus commode, et peut-être la plus avantageuse de toutes.

Enfin dans de certains pays on les construit presqu'entièrement en bois, dans d'autres au contraire on les fait entièrement en fer : telles sont entre autres les belles grues du port de Leeds : elles ont été fondues dans le superbe établissement de Bradford.

Je ne continuerai pas davantage la nomenclature des diverses machines qui se rapportent aux combinaison du treuil et du levier : il suffit de celles que je viens de vous indiquer pour que vous puissiez par analogie reconnaître toutes celles dans lesquelles se rencontrerait une semblable combinaison. Je vais seulement vous faire connaître un moyen qu'on employe souvent dans ces diverses machines pour augmenter la puissance due à l'action du tour, sans courir la chance de compromettre sa solidité.

Nous avons vu que dans un tour, toutes choses égales d'ailleurs, la puissance a d'autant plus d'avantage sur la résistance que le rayon de l'ar-

bre du treuil est plus petit : d'un autre part plus ce rayon est petit et moins l'arbre offre de résistance, ensorte que tandis que d'une part la puissance augmente d'effet, de l'autre la constitution même de l'instrument devient de moins en moins capable de se prêter à de grands efforts. On a imaginé pour obvier à cet inconvénient l'appareil suivant fort simple, et qui ne laisse rien à désirer.

Imaginez (planche 12 fig. 9) un treuil dont l'arbre ait deux diamètres différens, l'un égal à D, l'autre à d ; concevez ensuite la résistance Q suspendue à une poulie laquelle est soutenue par une corde qui s'enroule dans un sens sur l'arbre du diamètre d et dans le sens contraire sur l'arbre du diamètre D. Donnez à tout le système un mouvement de rotation et soit R, le rayon de la roue du treuil.

Le point d'application de la force P décrira comme nous l'avons déja vu ailleurs un trajet qu'on peut représenter par K . R. : d'une autre part le poids R montera d'un coté d'une quantité $\frac{K \cdot D}{2}$ mais il descendra en même temps d'une autre quantité $\frac{K \cdot d}{2}$ puisqu'il est visible que l'un des bouts de la corde se déroule quand l'autre s'enroule autour du cylindre. Ainsi nous aurons entre P et Q la relation suivante :

$$\frac{P}{Q} = \frac{K.\ \frac{(D-d)}{2}}{K\ R} = \frac{D-d}{2\ .\ R}.$$

d'où il suit que la force P produira le même effet que si elle agissait sur un arbre dont le rayon fut $\frac{D}{2} - \frac{d}{2}$.

Vous voyez donc qu'il n'y aurait pas de force qu'on ne put équilibrer au moyen d'un semblable système et d'une force P quelconque. Malheureusement cet appareil exige beaucoup de corde, et permet de faire faire peu de trajet au poids Q. C'est encore un de ces exemples qui prouvent à l'œil ce que je vous ai dit tant de fois que l'on cherche en vain à gagner à la fois la force et la vitesse, et que les machines les plus favorables à l'équilibre sont les moins avantageuses pour le mouvement.

3° *Combinaisons du treuil et du coin, tours à tourner, alesoirs, forets, vrilles.*

On peut considérer un grand nombre d'instrumens comme des composés plus ou moins variés du tour et du coin : tel est par exemple le tour ordinaire destiné à donner à de certains corps les formes de surfaces de révolution : dans cette machine le solide qu'on veut tourner est suspendu sur des supports qui forcent son mouvement à s'effectuer autour d'un axe fixe. Pendant ce temps un outil tranchant enlève les parties du corps qui

ne sont pas comprises dans la surface de révolution qui doit terminer sa forme. Le mouvement est donné par une roue fixée sur le même axe de révolution que le corps et autour de laquelle s'enroule une corde ou une courroie qui passe sur une roue plus grande mise en mouvement soit par une machine, soit au moyen d'une manivelle par un homme.

Dans cet appareil la résistance se trouve être l'effort qu'il faut pour entamer le corps au moyen du ciseau. La puissance agit sur la manivelle ou directement sur la grande roue; connoissant alors le diamètre de toutes les roues et la distance du ciseau à l'axe de révolution, il vous sera facile de trouver le rapport de la puissance à la résistance pour quelque point que ce soit du corps à tourner.

Les *alesoirs* et les *forets* instrumens destinés à donner à l'intérieur de certains corps la forme d'un cylindre à base circulaire peuvent également être considérés comme des modifications du tour combiné avec le coin.

Ces instrumens sont d'une grande difficulté d'exécution et leur emploi exige des précautions dont il n'est peut-être pas inutile de vous entretenir.

Un alesoir est généralement composé d'un arbre horizontal en fer forgé ou en fonte, terminé à ses deux extrémités par deux ouvertures coniques dans lesquelles viennent se placer deux pointes destinées à forcer l'arbre à tourner exactement autour

de la droite imaginaire qui les joint. L'une de ces pointes est fixée à un support vertical immobile, l'autre est placée au centre d'un grand plateau de fonte qui tourne avec la machine : ce plateau porte des boutons en saillie, au moyen desquels il pousse un levier fixé à l'arbre et le force à suivre son mouvement de rotation.

Déjà dans cette disposition vous voyez un premier avantage, celui de rendre la position de l'arbre indépendante de la condition d'être dans la même direction que l'axe de la roue tournante, condition très-difficile si pas impossible à remplir.

Dans l'arbre de l'alesoir se trouve une rainure longitudinale, dans laquelle est logée une vis de rappel : cette vis est mise en mouvement par un système d'engrenage dont quelques parties sont fixées à l'arbre et les autres au montant immobile dont je vous ai déjà parlé. Au moyen de la rotation de la vis un collier qui embrasse l'arbre et qui porte à son limbe les six ou huit couteaux qui arment l'alesoir est poussé en avant et parcourt ainsi tout l'intérieur du cylindre à aleser. Cet appareil ingénieux est parfaitement exécuté dans le magnifique établissement de M. Cockerill, à Seraing.

Les couteaux d'un alesoir ne doivent guère marcher vite : il paraît que leur vitesse la plus convenable est d'enlever un centimètre en quarante tours : au reste on sent très-bien que cela dépend beaucoup de la nature du métal à aleser.

Lorsque l'on se sert de l'alesoir horizontal pour des pièces ou des corps de pompe d'un grand diamètre, il faut prendre les plus grandes précautions en les fixant. M. le major Bake m'a assuré que la pression exercée par les chaînes dont on se sert quelquefois pour fixer les corps de pompes d'un fort calibre suffit pour les déformer à l'intérieur.

Enfin, il faut encore savoir proportionner l'arbre de telle façon que son poids et celui du couteau ne puissent pas le faire fléchir d'une façon sensible : ce défaut aurait de graves conséquences et pourrait dans beaucoup de cas rendre les pièces alesées incapables de servir.

Dans les petits ateliers et pour aleser des corps de pompes d'un diamètre peu considérable on se sert d'un autre espèce d'alesoir beaucoup plus simple et qui tient très-peu de place : il consiste en une vis d'un diamètre d'environ deux pouces, d'un filet serré et solide : cette vis est fixée dans une position verticale au moyen d'un fort écrou attaché à une solide traverse horizontale en bois : à la partie inférieure de la vis se trouve un morceau de fer de fonte figurant assez bien un cylindre à arêtes verticales, duquel on aurait ôté trois segmens : des trois saillies restantes deux sont destinées à guider l'instrument, la troisième est armée d'un couteau qui sert à aleser. Autrefois on se servait de trois couteaux, il paraît plus

convenable de n'en employer qu'un seul, du moins jusqu'à présent les résultats paraissent plus avantageux.

Il est d'usage pour les petits corps de pompe d'y couler du plomb après les avoir alesés, on se sert ensuite de ce plomb couvert d'un peu d'émeri pour achever complètement le poli et l'uni intérieur du cylindre.

Les *forets* servent pour former l'âme des canons qui est aussi une cavité cylindrique à base circulaire : une observation importante à faire c'est que c'est ici le corps à aleser qui tourne et non pas le foret ; il résulte de là que la masse du corps tournant étant très-considérable, s'il survient dans la fonte quelques défauts inattendus ou quelques parties où le metal soit trop dur pour céder au foret dans un temps donné, l'instrument se tord ou se brise et le calibre est entamé d'une manière irrégulière et dangereuse. On parvient à éviter cet inconvénient au moyen d'un appareil fort simple que vous observerez dans tous les établissemens de foreries.

Le foret est poussé en avant à l'aide d'une grande roue qui s'engage au moyen d'un pignon dans une crémaillère horizontale fixée au foret : la grande roue porte plusieurs dents ou plutôt plusieurs crochets auquels on suspend au moyen d'un levier un poids plus ou moins considérable; quand la roue abandonnée à ce poids a décrit

l'angle correspondant à l'intervalle de deux dents on enlève le poids au moyen du levier et on le suspend au crochet supérieur de manière à faire ainsi successivement parcourir à la roue un tour entier.

On conçoit, dans cette circonstance, à quoi sert ce poids : lorsque la résistance du métal est plus grande que l'action du poids sur le foret, le foret n'avance plus, et par conséquent on n'a à craindre aucun des accidens dont j'ai parlé. Néanmoins l'appareil tel que je vous l'ai décrit est encore assez défectueux, et il serait à désirer qu'on pût y introduire quelques corrections.

Les *vrilles*, les *tarières*, les *sondes* sont de véritables coins fixés à une tige à laquelle on communique un mouvement de rotation au moyen d'une barre transversale qui y est attachée comme dans la vrille; ou au moyen d'une manivelle double comme dans le *vilebrequin* et le *perçoir des tonneliers*. Il vous sera facile de comprendre pourquoi l'on arme tous ces instrumens d'une vis, lorsque nous aurons vu la théorie de cette machine. Vous saurez alors que c'est dans le but de substituer la force qu'on est déjà obligé d'employer pour produire la rotation de l'instrument à une force de pression qui devrait être beaucoup plus considérable et qui ne produirait pas d'ailleurs un aussi bon effet quant à la direction de l'ouverture.

Dans tous ces instrumens il doit vous paraître

clair que l'effet à en attendre sera d'autant plus grand que la largeur de la lame sera moins considérable, tout le reste étant le même. C'est ce qui fait, quand on doit ouvrir des trous cylindriques dans les corps durs, qu'on emploie quelquefois successivement des forets de dimensions de plus en plus grandes; et que quand on n'employe qu'une seule lame elle est ordinairement terminée en pyramide, afin que la pointe ait moins de résistance à vaincre et puisse ainsi préparer un passage plus facile au reste de la lame.

4° *Combinaison du tour et du plan incliné*, *vis.*

La combinaison que je viens d'indiquer consiste à former sur la surface extérieure d'un cylindre une saillie, au moyen de laquelle le cylindre en prenant un mouvement de rotation dans une enveloppe immobile, avance d'une certaine quantité constante dans le sens de son axe chaque fois qu'il tourne d'une quantité angulaire constante autour de cet axe. Le cylindre ainsi disposé se nomme *vis*, et la pièce dans laquelle il tourne se nomme *écrou.*

Lorsque l'on veut considérer un tel instrument comme machine, on a coutume de supposer le cylindre traversé par une barre ou levier dans une de ses extrémités qu'on nomme tête de la vis, et l'on suppose une force P, appliquée à cette barre ou levier, tandis qu'une autre force Q sollicite le mouvement du cylindre dans le sens de son axe.

Il est très-facile de donner alors les conditions de relation entre P et Q pour que ces forces se fassent équilibre.

En effet, soit ω la vitesse angulaire d'un point situé à l'unité de distance de l'axe de rotation : soient en même tems ε l'espace parcouru dans le sens de l'axe pendant que ce point parcourt ω, et R la longueur du levier auquel est appliquée la force P.

Il est clair que pendant qu'un point placé à une distance de l'axe égale à l'unité parcourra l'arc ω, la puissance P parcourra l'espace ω. R : dans le même tems la force Q avançant avec l'axe parcourra l'espace ε : pour l'équilibre on aura donc

$$P . R . \omega = Q . \varepsilon.$$

d'où l'on tire

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{\omega}.$$

Ainsi le rapport de la force P à la force Q est d'autant plus petit que R est plus grand et que $\frac{\varepsilon}{\omega}$ est plus petit ; cette dernière condition tenant à la relation entre la vitesse angulaire du cylindre et sa vitesse de translation suivant son axe, exige pour être bien comprise que l'on connaisse le moyen mécanique d'obtenir à la fois ces deux mouvemens.

Imaginons un cylindre à base circulaire (pl. 12 fig. 10) d'une hauteur et d'un diamètre quelconque : vous savez qu'une propriété de cette figure géométrique est de pouvoir se développer, c'est-à-dire qu'on peut dérouler sa surface en l'étendant sur un plan ; alors cette surface déroulée prend la forme d'un rectangle *aacc* (fig. 11) dont deux côtés *cc* et *aa* sont les développemens des deux circonférences des bases du cylindre, et les deux autres *ac* et *ac* sont les positions de la même arête *ac* dans le cylindre de la figure 10. Si l'on reprenait ensuite ce rectangle *aacc*, il est toujours possible de le replacer sur le cylindre de manière à le recouvrir tout à fait.

Supposons maintenant qu'on ait tracé dans le plan du rectangle *aacc* (fig. 11) la diagonale *ac*, et qu'ensuite on ait de nouveau roulé le rectangle sur la surface du cylindre, cette diagonale prendra la forme d'une courbe rampante *a*DE*bc*, qu'on appelle *hélice*, et qui jouit de propriétés intéressantes relativement au sujet que nous nous sommes proposé de traiter.

Supposons que l'on fasse tourner le cylindre autour de son axe *oo'* (fig. 5), c'est-à-dire de la droite qui joint les centres des cercles bases du cylindre. Supposons en même temps que ce mouvement doive s'opérer de manière à ce que l'hélice passe toujours par un point fixe D, vous concevrez facilement que de cette condition il

résultera pour le cylindre un mouvement de translation dans le sens de son axe : voyons quelle sera la relation de ce mouvement de translation avec le mouvement de rotation.

Prenons sur le cylindre et sur l'hélice un point E, lequel nous supposerons situé sur la ligne *ac* (fig. 11) en E également, menons dans cette dernière figure les perpendiculaires D*d*, E*e* à la base *aa*, ainsi que la droite DF parallèle à cette base. En replaçant le quadrilatère sur le cylindre, les deux droites D*d* et E*e* ne cesseront pas d'être perpendiculaires à la base et seront par conséquent des arêtes du cylindre, et le triangle DEF se projettera sur le cylindre suivant un triangle DEF lequel aura pour base l'arc DF parallèle et égal à *de*, et dans lequel la hauteur EF sera la même qne celle EF du triangle rectiligne de la figure 11.

Maintenant supposons qu'on fasse marcher le cylindre jusqu'à ce que le point E de l'hélice vienne se placer en D, point fixe par lequel l'hélice doit constamment passer : cette coïncidence n'aura lieu que quand l'arête E*e* coïncidera avec l'arête D*d*, ainsi il faudra pour cela que le cylindre ait décrit la valeur angulaire *eod* correspondante à un arc décrit avec l'unité de mesure pour rayon, arc que nous nommons ω : mais dans le même tems le cylindre se sera avancé dans le sens de son axe de la même quantité dont s'est avancé le point E et par conséquent de la quantité EF que nous

nommons ε, en sorte que si l'on avait deux forces à équilibrer au moyen d'une semblable machine, l'une des deux forces agissant sur l'axe, et l'autre perpendiculairement à cet axe au moyen d'un levier R, l'équation d'équilibre

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{R} \quad \frac{\varepsilon}{\omega}.$$

que nous avons trouvé précédemment deviendrait

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{R} \cdot \frac{EF}{\omega}.$$

ω étant l'arc décrit avec le rayon pour unité dans l'angle *eod*, sera égal à $\frac{de}{r}$, r étant le rayon du cylindre, ainsi on aura donc, en observant que de = DF

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{EF}{DF}.$$

Or, en nous rapportant à la figure 11, nous voyons facilement que le triangle EDF est semblable au triangle *aac*, et par suite que l'on doit avoir

$$\frac{EF}{DF} = \frac{ac.}{aa.}$$

d'une autre part *aa* est égal à la circonférence du cercle base du cylindre d'où l'on tire

$$aa = 2\pi . r$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, ce qui donne

$$\frac{EF}{DF} = \frac{ac}{2\pi . r}$$

et ensuite

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R} \times \frac{EF}{DF} = \frac{r}{R} \times \frac{ac}{2\pi . r} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{ac}{R.}$$

d'où il suit que le rapport entre la force dirigée perpendiculairement à l'axe et celle parallèle à l'axe ne dépend que de deux choses, savoir la longueur de l'arête *ac* qui joint les deux extrémités de l'hélice et la distance R de l'axe à la force P qui lui est perpendiculaire.

Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un cylindre d'une hauteur finie et une hélice d'une longueur finie. Mais nous pouvons cependant très-bien concevoir un cylindre infini, auquel appartiendrait la partie de cylindre marquée dans la figure 10; si ensuite nous imaginons que pendant le mouvement forcé du cylindre, un style touche quelque part sa surface en un point, ce style ou ce crayon marquera sur le cylindre une autre hélice parfaitement identique avec la première, et qui n'en serait que la continuation, si elle avait un point de commun avec elle. C'est ainsi qu'on peut prolonger une hélice indéfiniment en-dessus et en-dessous d'une quelconque de

ses parties, et c'est ainsi que vous pourrez supposer qu'a été tracée l'hélice indéfinie *a'' a' a c c' c''* (fig. 11).

Il vous sera également aisé de concevoir pourquoi toute portion E E' d'arête du cylindre comprise entre deux traces successives de l'hélice est toujours la même, puisqu'il est évident que les deux points traceurs fixes ne changent pas leurs relations de position dans le mouvement du cylindre, et par suite que chaque fois que la même arête passe sous eux, le point qu'ils y marquent doit toujours être au dessus ou au dessous du précédent d'une même quantité qui est celle dont le cylindre avance à chaque rotation.

Cette longueur constante qui sépare les points de l'hélice situés sur la même arête s'appelle *pas de l'hélice :* elle est dans notre figure égale partout à *ac*, ainsi l'équation que nous avons indiquée pour l'équilibre devient susceptible de s'énoncer ainsi :

Lorsque une puissance P et une résistance Q, agissant l'une sur l'autre au moyen d'un cylindre géné dans son mouvement par la condition qu'une hélice tracée sur sa surface, passera toujours par un point fixe; si ces deux forces sont disposés de manière à ce que l'une Q tire dans le sens de l'axe du cylindre et l'autre P tire en sens perpendiculaire, à une distance R de l'axe; la relation nécessaire entre elles pour l'équilibre c'est que *la puissance soit à la résistance comme le pas de*

l'hélice est à la circonférence du cercle décrit par le point d'application de la puissance.

Ainsi cette dernière force sera d'autant plus avantagée par rapport à la résistance, que, toutes choses égales d'ailleurs, elle agira sur un plus grand bras de levier, ou que le pas de l'hélice sera moins grand.

Pour forcer le cylindre à suivre la loi de mouvement dont nous avons parlé, on a recours à la construction suivante.

Concevez (planche 13, fig. 1,) un rectangle *a b c d* dont le plan soit dirigé de manière à passer par l'axe du cylindre; imaginez ensuite que ce rectangle soit assujetti à se mouvoir autour du cylindre de manière à ce que l'un de ses points, le point *a* par exemple, ne quitte pas l'hélice *a* A *a* A... tracée sur le cylindre, alors il vous sera facile de voir que le parallélogramme rectangle dont nous venons de parler engendrera autour du cylindre une saillie régulière composée d'une infinité d'hélices superposées les unes aux autres et limitée par trois surfaces, dont une, celle engendrée par le côté *b c*, n'est qu'une portion de surface cylindrique comprise entre deux hélices, tandis que les deux autres engendrées par les côtés *a b* et *c d* sont des surfaces gauches, nommées surfaces héliçoïdes. Le cylindre ainsi armé de cette saillie qu'on nomme *filet*, forme une véritable vis. Il est facile de voir que le pas de toutes les hélices

engendrées par les divers points du rectangle est le même : ce pas devient donc le pas de la vis, c'est-à-dire la distance entre deux points corres-dans de l'hélice saillante, mesurée dans le sens de l'axe de la vis, ou, en d'autres termes, la quantité dont la vis avance dans le sens de son axe pour un tour entier.

Quelquefois au lieu d'un rectangle générateur du filet de la vis on emploie (fig. 2, planche 13) un triangle *a b c*; vous pouvez concevoir alors que le filet engendré ne présente plus que deux surfaces, toutes deux, du reste, assez compliquées, et qu'on nomme aussi surfaces héliçoïdes.

Dans le premier cas la vis s'appelle vis à filet rectangulaire, dans le second, vis à filet triangulaire.

La première variété de vis est fréquemment employée pour obtenir des mouvemens qui demandent beaucoup de douceur et d'exactitude; on la retrouve particulièrement dans les tours mécaniques, les alesoirs, etc.

La seconde est plus souvent employée aux usages qui ne demandent pas autant de perfection, et aussi dans les circonstances où il s'agit de pénétrer dans des corps résistans : on donne alors à la vis une forme conique, afin qu'elle agisse à la manière du coin : telle est, comme vous le savez, la disposition particulière de la vis à bois.

Pour former l'écrou de la vis, vous pouvez con-

cevoir qu'on ait modelé un corps mou sur elle; alors le filet formera dans ce corps un creux qui sera le logement obligé du filet de la vis dans tous ses mouvemens (fig. 3 et 4). Cet écrou dans la réalité est ordinairement un morceau de bois ou de métal rectangulaire d'une épaisseur moindre que la longueur de la vis. Les vis à bois font leur écrous elles-mêmes en avançant dans le bois où elle se logent.

La fabrication des vis se fait assez simplement : on se sert pour cela d'instrumens qu'on nomme filières, et qui ne sont autre chose qu'un écrou de métal très-dur, ordinairement d'acier fondu et trempé : après avoir préparé le fil métallique de manière à avoir un diamètre un peu plus grand que le diamètre apparent de l'écrou, on le fait entrer de force dans cette ouverture, et en saisissant son extrémité avec une pince ou dans un étau on fait tourner le fil ou l'écrou de manière à tracer sur le fil l'empreinte exacte de l'écrou sur une longueur déterminée et alors la vis est faite.

Les filières sont de deux genres : pour les vis d'un petit diamètre, l'écrou est percé en plein métal et ordinairement il s'en trouve plusieurs de calibres différents sur la même plaque d'acier fondu : (fig. 5) pour les vis d'un diamètre plus considérable, l'écrou est composé de deux pièces qui sont susceptible de s'éloigner et de se rapprocher, (fig. 6) au

moyen d'un cadre à rainure dans lequel elles sont placées. L'instrument est alors armé de deux leviers pour pouvoir agir avec plus de force, et d'une vis ou d'une clef pour écarter ou rapprocher les pièces de l'écrou.

Quand il s'agit de former l'écrou pour une vis d'un filet connu, on en fait une autre tout-à-fait semblable, dans laquelle on pratique des entailles longitudinales, qui interrompent le filet et lui donnent la forme du coin : on introduit ensuite cette vis, qui est d'acier trempé, dans le cylindre ou l'on veut tracer l'écrou ; dans le mouvement de rotation, les angles saillans du filet pénètrent dans dans le métal de l'écrou et enlèvent le creux nécessaire pour loger le filet de la vis.

Dans les machines où l'on emploie la vis, tantôt l'écrou est immobile tandis que la vis tourne, tantôt c'est l'écrou qui tourne tandis que la vis est immobile, enfin quelquefois les deux pièces se meuvent en même tems. Vous avez un exemple de cette dernière combinaison dans la presse à papier, ou presse à satiner des imprimeurs : cette presse est composée de quatre montans verticaux très-solides, (voyez fig. 7), supportant une traverse horizontale dans laquelle est logé un écrou : une forte vis tourne dans cet écrou au moyen de leviers qui traversent sa tête, et fait marcher avec elle un plateau horizontal A, très solide, assujetti à glisser entre les montans sans prendre de mouve-

ment de rotation. Les objets auxquels on veut faire subir la pression sont placées en B, entre le plateau inférieur C et le plateau mobile A. On tourne les leviers dans le sens convenable pour rapprocher le plateau A du plateau C, et la pression est obtenue.

Si l'on voulait savoir quelle pression un homme peut exercer avec un semblable appareil, dans lequel la vis aurait un pas de 10 centimètres, la longueur du levier étant à partir de l'axe de la vis de 2 mètres, on aurait pour le rapport de la pression Q exercée dans le sens de l'axe de la vis, à la force P appliquée à l'extrémité du levier.

$$\frac{P}{Q} = \frac{0,\ 10.}{2.\pi \times 2.} = \frac{1}{40 \times \frac{22}{7}} = \frac{1}{125.}$$

et si l'on suppose comme nous l'avons déjà fait $P = 25$ kilogrammes on aura $Q = 25 \times 125 = 3125$ kilogrammes valeur qui peut être quadruplée en employant quatre leviers au lieu d'un seul, comme cela se pratique assez fréquemment.

Quelquefois l'on donne le mouvement de rotation à la vis au moyen d'un système de roues dentées : alors on peut augmenter considérablement la pression.

Une chose qu'on observe, lorsqu'on se sert de semblables presses, c'est qu'après avoir comprimé des corps doués cependant d'élasticité, jusqu'à un

certain point, si on abandonne la presse à elle-même, elle ne revient pas en arrière et reste immobile en continuant la pression. Cette circonstance singulière est due au frottement et vous allez le concevoir de suite.

Il est visible que l'on ne peut concevoir le mouvement de la vis dans son écrou sans admettre en même tems une pression et par suite un frottement de quelques parties de la vis sur l'écrou : ce frottement doit être mis en ligne de compte dans la recherche de l'équilibre de la vis : mais au premier abord comme il se présente la difficulté de savoir quels sont les points du système où ce frottement se développe, on peut supposer que la résultante de toutes les pressions passe sur la série des points moyens de la surface du filet ; alors il ne s'agit que de déterminer cette pression.

Pour cela observons qu'elle est due à deux causes : d'abord à la force Q, ensuite à la force P perpendiculaire à l'axe : désignons ensuite par ρ le rayon du cylindre qui contient l'hélice moyenne que nous supposerons avoir un pas égal à p : ensuite désignons, pour un point quelconque de cette hélice, par ϕ le rapport du frottement à la pression pour deux surfaces de la nature de celles de la vis et de son écrou : l'angle formé par la force Q avec la surface héliçoïde du filet aura évidemment pour cosinus $\frac{p}{\sqrt{p^2+(2\pi\rho)^2}}$ ainsi la composante

normale produite par Q sera $Q \times \frac{2\pi\rho}{\sqrt{p^2+(2\pi\rho)^2}}$
d'une autre part l'angle formé par la composante P′ de P avec cette surface aura pour cosinus $\frac{p}{\sqrt{p^2+\overline{2\pi\rho}^2}}$ ainsi P′ produira une pression normale égale à $P' \times \frac{p}{\sqrt{p^2+\overline{2\pi\rho}^2}}$; si l'on observe ensuite que pour que P′ puisse remplacer l'action de P il faut que l'on ait $P' = \frac{P \cdot R}{\rho}$, on verra que la pression normale produite par P est égale à

$$P \times \frac{R}{\rho} \times \frac{p}{\sqrt{p^2+\overline{2\pi\rho}^2}}$$

d'après cela la somme des pressions normales est donc :

$$\frac{Q \times 2\pi\rho + P \times p \times \frac{R}{\rho}}{\sqrt{p^2+\overline{2\pi\rho}^2}}$$

Ce qui donne un frottement égal à

$$f = \phi \times \frac{Q \times 2\pi\rho + P \times p \times \frac{R}{\rho}}{\sqrt{p^2+\overline{2\pi\rho}^2}}$$

Maintenant, faisons faire un tour entier à la vis:

l'espace parcouru par la force P sera $2\pi R$, celui parcouru par la force Q sera p et enfin celui parcouru par la force f sera évidemment la longueur de l'hélice ou $\overline{2\pi\rho^2 + p^2}$ ce dernier espace sera toujours parcouru en sens contraire du frottement, en sorte que le moment virtuel de f sera toujours négatif, tandis que ceux de P et Q pourront être négatifs ou positifs, mais seulement des signes contraires, ce qui donne pour l'équation de l'équilibre

$$\pm(P\times 2\pi R - Q\times p) - \phi\left(Q\times 2\pi\rho + P.p\frac{R}{\rho}\right) < o.$$
$$\text{ou} = o.$$

et par suite

$$P\times\left(2\pi R \mp \phi.p\frac{R}{\rho}\right) - Q(p.\pm 2\pi.\rho.\phi) < o$$
$$\text{ou} = o$$

et désignant $\frac{P}{Q}$ par K on voit que l'équilibre existera pour toutes les valeurs de K qui satisferont à la fois aux deux inégalités suivantes.

$$K\left(2\pi R - \phi.p.\frac{R}{\rho}\right) - (p + 2\pi\rho.\phi) < o.$$
$$\text{et}\quad K\left(2\pi R + \phi.p.\frac{R}{\rho}\right) - (p - 2\pi\rho.\phi) < o.$$

Or il est facile de voir que ces valeurs de K sont toutes comprises dans la formule

$$K = \frac{m \frac{(p + 2\pi\rho.\phi)}{2\pi R - \phi.p.\frac{R}{2}} + n \frac{p - 2\pi\rho.\phi}{2\pi\rho + \phi.p.\frac{R}{\rho}}}{m + n}$$

m et n étant des nombres entiers arbitraires.

De là on déduit de suite que l'équilibre de la vis avec frottement peut avoir lieu d'une infinité de manières : d'une autre part comme il est facile de le voir cette valeur de K est toujours comprise entre $\frac{p + 2\pi\rho.\phi}{2\pi.R - \phi.p.\frac{R}{\rho}}$ et $\frac{p - 2\pi.\rho.\phi}{2\pi.\rho + \phi.p.\frac{R}{\rho}}$; ce qui prouve que ces deux quantités sont les limites du rapport K convenable à l'équilibre, et par conséquent correspondent aux états d'équilibre où l'une des deux forces est prête à l'emporter sur l'autre ; ainsi l'on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{p + 2\pi.\rho.\phi.}{2\pi.R - \phi.p.\frac{R}{\rho}}$$

lorsque la force P sera prête à l'emporter et

$$\frac{P}{Q} = \frac{p - 2\pi.\rho.\phi.}{2\pi.R + \phi.p.\frac{R}{\rho}}$$

lorsqu'au contraire ce sera la force Q qui sera près de l'emporter sur la force P.

Or dans ce dernier cas si l'on suppose que l'on ait $p = 2. \pi. \rho. \phi$, équation qui dépend de la construction de la vis et de la matière dont elle est formée, on aura évidemment

$$\frac{P}{Q} = o, \text{ et } P = o.$$

d'où il résulte que quelle que soit la pression Q la vis restera en équilibre au moyen du frottement seul, puisque la force tangentielle P nécessaire pour empêcher le mouvement se réduit à Q.

L'équation $p = 2 \pi. \rho. \phi$, donne pour condition que le rapport entre le pas de la vis et la longueur d'un tour entier de l'hélice soit égal au rapport entre la pression et le frottement pour les deux surfaces, condition qu'il est toujours possible de remplir.

Lorsque cette condition est remplie, si l'on veut chercher quelle doit être l'expression de la force P pour qu'elle soit prête à l'emporter sur la résistance Q on trouve

$$\frac{P}{Q} = \frac{p + 2 \pi p. \phi}{2 \pi R - \phi. p. \frac{R}{\rho}}$$

et en observant que $p = 2 \pi \rho. \phi$ cette équation devient :

$$\frac{P}{Q} = \frac{2 p.}{2 \pi R - \phi^2. \times 2 \pi R} = \frac{p}{\pi. R (1 - \phi^2)}.$$

ce qui donne pour P une valeur un peu plus que double de celle qui serait nécessaire sans le frottement. Ainsi l'on voit maintenant facilement comment il se peut faire que bien qu'il faille une force assez considérable pour faire tourner la vis d'une presse, on peut ensuite l'abandonner à elle même sans danger qu'elle ne revienne dans le sens opposé à la pression qu'on veut obtenir.

La vis n'est pas seulement employée à la construction des presses : ses usages sont infiniment multipliés dans les arts, et l'on peut dire que c'est un des organes mécaniques les plus utiles. On l'a substitué à la cremaillère dans le cric : dans cette construction, on employe une forte vis dont la partie inférieure porte une roue dentée. Cette roue dentée est engagée dans un pignon lequel ainsi que la roue dentée fait partie composante d'un assemblage rectangulaire très-solide qui glisse dans le prisme droit formant le corps du cric. Le pignon reçoit son mouvement au moyen d'une tige carrée en fer le long de laquelle il glisse à l'aide d'un carré dont il est percé à son centre : et cette tige carrée marche par deux roues coniques dentées dont l'une est fixée à son extrémité et l'autre tient à l'axe de la manivelle. La double corne du cric, peut prendre un mouvement de révolution indépendant de celui de la vis, afin de pouvoir rester immobile ou de suivre les mouvemens de l'obstacle lorsqu'on fait agir le cric et tourner la vis. Cette

espèce de cric, un peu plus dispendieux que l'autre, à pour elle l'avantage d'un mouvement très-doux et celui de pouvoir développer une grande force.

On se sert encore fréquemment de la vis pour manœuvrer les freins, organes mécaniques qui, comme nous l'avons vu, servent à détruire sans secousses, ni chocs ou contre-coups, un mouvement acquis, ou à empêcher son accélération : on trouve un exemple de ce dernier emploi dans la vis qui sert à presser contre les roues d'un fort chariot les deux plaques de bois destinées par leur frottement à empêcher les roues de tourner, et par conséquent à opposer leur frottement à la force qui tend sur les chemins inclinés à en accélérer la vitesse. J'observerai en passant que ce mode d'enrayage, bien que commode, a néanmoins l'inconvénient grave de laisser porter tout l'effet du frottement sur la roue, et par suite de la fatiguer excessivement et de tendre à la démembrer : le sabot ou frein ordinaire ne présente pas cet inconvénient, et protège la roue contre ses résultats, ainsi il me semble à préférer.

Quelquefois pour augmenter la résistance de la vis, on la fait à plusieurs filets : c'est-à-dire qu'on trace sur sa surface plusieurs hélices parallèles dont chacune engendre un filet particulier. Il est visible dans ce cas que l'équilibre a lieu comme s'il n'y avait qu'un seul de ces filets : ainsi il faudra

bien se garder de prendre la distance entre les arêtes correspondants de deux filets consécutifs pour le pas de la vis, mais au contraire on prendra la distance entre les deux parties d'un même filet correspondantes à la même arête cylindrique.

Les vis destinées à se mouvoir avec rapidité dans le sens de leur axe, et qui doivent supporter dans ce sens de grands efforts, sont construites de cette manière : on s'en sert surtout pour les balanciers à frapper les médailles et les monnaies. On en fait aussi quelquefois usage pour les vis destinées à produire un mouvement très-régulier, comme certaines vis de tour et d'instrumens à diviser : ici le double filet est simplement employé comme compensateur, l'un des deux corrigeant les défectuosités de l'autre.

Les instruments de mathématiques exigent quelquefois qu'on puisse estimer avec précision des distances extrêmement petites et dont la longueur serait inappréciable pour les mesureurs ordinaires. Les vis sont fréquemment employées dans ce cas : on profite de cette circonstance que nous connaissons, savoir que pour un tour entier la vis avance d'une longueur égale à son pas. Si donc on place un indicateur à son extrémité et qu'on fasse marcher cet indicateur depuis l'origine jusqu'à la fin de la distance à mesurer, en comptant le nombre de tours nécessaire pour faire ce trajet on saura combien de fois le pas de la vis est contenu dans

cette distance; mais si l'on veut pousser l'exactitude plus loin, on adapte à la tête de la vis un cadran divisé, et l'on fixe un index au moyen duquel on peut non-seulement compter une révolution entière, mais encore une fraction quelconque de tour et par suite une fraction de pas. Ainsi avec une vis dont le pas aurait $\frac{1}{10}$ de millimètre et dont le cadran serait divisé en 100 parties égales on pourrait estimer jusqu'au millième de millimètre, valeur si peu considérable qu'elle échapperait à l'œil nu. Un pareil instrument, dont la précision peut être encore augmentée au moyen d'un appareil dioptrique, se nomme micromètre.

Dans ces instrumens une grande difficulté de la construction consiste à donner à la vis un pas parfaitement constant, et cette difficulté augmente avec la finesse du pas; en sorte qu'en gagnant d'un côté par le rapprochement des filets, on perd de l'autre par l'irrégularité du mouvement.

Dans les grandes machines aussi, lorsqu'on veut gagner beaucoup en puissance longitudinale, on est obligé de diminuer considérablement le pas de la vis: mais alors le filet diminue aussi et bientôt l'instrument n'offre plus la solidité requise.

Ainsi, dans les deux cas précédens, la même difficulté se rencontre, savoir: conserver à une vis ou à un écrou un mouvement de translation très-lent, sans cependant trop amaigrir les filets.

On doit au savant Prony une solution aussi

complète qu'élégante de ce problème : imaginons une vis d'un pas p et une autre d'un pas p', taraudées dans le même sens et attachées au même axe de manière à former un assemblage solide. Supposons que la partie de la vis dont le pas est p, tourne dans un écrou fixe, tandis que la partie p' tourne dans un écrou assujetti à glisser entre des guides qui l'empêchent de tourner. Il est clair que dans une révolution entière de la vis, elle avancera de la quantité p par rapport à l'écrou fixe, et si l'écrou mobile avait suivi le mouvement de la vis il aurait avancé de la même quantité ; mais au lieu de cela, la vis ayant fait un tour entier dans l'écrou mobile a avancé par rapport à lui d'une quantité p', ou, en d'autres termes, l'écrou mobile aura reculé de p' par rapport à la vis ; il résulte donc de là que cet écrou mobile a parcouru le chemin p moins le chemin p' qu'il a fait en sens contraire, et par conséquent son mouvement n'a produit que le trajet $p - p'$.

Si donc on avait $p' = \frac{9}{10} p$, $p - p'$ serait égal à $\frac{1}{10}$ de p, d'où il suit que la vis produirait le même effet que si ses filets étaient réduits au dixième de l'épaisseur qu'on jugera à propos de leur donner.

Beaucoup d'instrumens, comme les tire-boures, les tire-bouchons et autres de la même espèce,

peuvent être considérés comme des modifications de la vis et du coin. Les mèches de la plupart des instrumens à forer, comme les vrilles, les vilebrequins, les tarières et autres, sont terminées par un pas de vis conique à filet tranchant. Le but de cet appendice est maintenant facile à concevoir : la vis en suivant le mouvement de rotation de l'instrument pénètre à chaque tour d'une longueur égale à son pas, et par conséquent fraye le passage à la lame tranchante de l'instrument, qui n'a plus qu'à l'élargir et le régulariser.

Nous terminerons tout cet article par un aperçu d'une des modifications de la vis dont l'invention est attribuée à Archimède, et qui trouve son application dans une foule de circonstances.

Si vous observiez la section plane d'une vis qui ne peut avoir qu'un mouvement de rotation autour de son axe, en supposant que le plan de la section reste immobile et qu'il passe par l'axe, vous verriez sur cette section la coupe des filets de la vis prendre un mouvement de translation uniforme parallèlement à l'axe : cela vient, comme nous l'avons vu, de ce que tout point assujetti à rester à la fois sur un plan fixe et sur le filet d'une vis, doit prendre un mouvement de translation de cette espèce.

Vous pouvez donc concevoir ici, que la section de la vis se comporte comme une crémaillère dentée dont les dents sont les diverses sections du

filet de la vis par le plan ci-dessus. Par suite il vous sera aisé de voir qu'il serait possible d'employer le mouvement de cette crémaillère pour communiquer un mouvement de rotation à une roue dont le limbe serait situé dans le plan de la section. Tel est en effet l'appareil qu'on appelle ***vis sans fin*** ou vis d'Archimède, et qui ne présente autre chose qu'une vis dont les filets s'engagent dans les dents d'une roue qu'elle pousse ainsi devant elle : il est évident que chaque tour de la vis fait avancer la roue de la quantité angulaire correspondant à une de ses dents ; ainsi la vitesse angulaire de la vis étant l'unité, celle de la roue sera égale à l'unité divisée par le nombre de ses dents, d'où il suit que vous aurez tout ce qu'il faut pour trouver l'équilibre de deux forces qui agiraient l'une sur la vis, l'autre sur la roue.

STATIQUE.

DOUZIÈME LEÇON.

De l'équilibre de quelques systèmes variables de formes.

Dans tout ce que nous avons traité jusqu'à présent, il n'a encore été question que de systèmes dont les formes et la disposition n'étaient exposées à aucune variation : en sorte que l'équilibre, une fois établi pour une situation, pouvait convenir à une infinité d'autres, ou du moins que les formules obtenues dans un cas particulier de position pouvaient en général être applicables, sauf quelques altérations des constantes mécaniques, à presque toutes les autres positions. Il n'en est pas de même pour les systèmes dans lesquels non seulement la forme peut changer, mais où les forces elles-mêmes peuvent varier avec la situation du système. Cependant le principe général d'équilibre subsiste toujours pour ces cas, et si ce n'est la difficulté de mettre en évidence les quantités qui doivent entrer dans l'équation ou les équations d'équilibre, la marche à suivre est exactement la même que dans toutes les autres circonstances.

1. Pour passer des cas les plus simples aux cas plus composés je commencerai par l'appareil qu'on appelle la *balance de Roberval*, du nom de ce célèbre mathématicien.

La balance de Roberval, (fig. 8, planche 13), se compose d'un parallélogramme *abcd*, ayant quatre charnières à ses angles, au moyen de quoi ce parallélogramme peut prendre une infinité de formes différentes : aux points *i* et K des cotés *ab* et *cd*, sont deux trous cylindriques qui servent à faire tourner ces deux côtés autour de deux pivots fixés dans le support vertical *i*K*l*.

Aux deux côtés *ac* et *bd* on attache d'une manière invariable deux bras *ef* et *gh* ; c'est à ces deux bras qu'on suspend d'une manière quelconque les poids P et Q. On demande maintenant les conditions d'équilibre entre P et Q, réagissant l'une sur l'autre au moyen d'un tel système.

Pour cela revenons au principe général dont nous nous sommes déjà servi : imaginons que le système ait pris un petit mouvement et voyons quel sera le trajet parcouru par chacune des forces P et Q.

D'abord dans ce mouvement les quatre côtés du parallélogramme n'auront pas changé de longueur, en sorte que la figure *a'b'c'd'* sera encore un parallélogramme : ainsi *a'c'* et *b'd'* sont parallèles entre elles et parallèles à *ac* et *bd* : d'une autre part il est facile de voir que K*d'* est encore égal

à Kc', en sorte que le point d aura autant monté pour arriver en d', que le point c aura descendu pour arriver en c' ; enfin la droite $g'h'$ sera évidemment restée parallèle à gh, comme aussi $e'f'$ à ef; et les distances comprises entre ces droites étant les mêmes que celles parcourues par les points d et c dans le sens de la verticale, et que celles parcourues en même tems par les points d'application des forces P et Q, il s'ensuit que ces dernières que nous nommons p et q sont aussi égales.

Mais pour l'équilibre on doit avoir

$$P.p = Q.q$$

d'où il suit

$$P.p = Q.p$$

à cause de $q = p$

et par suite

$$P = Q.$$

Ce qui veut dire que, quelle que soit la position des points d'application des forces P et Q, et quel que soit l'angle formé par les droites gh et ef avec les côtés ac et bd, la condition d'équilibre est toujours l'égalité des forces P et Q. Condition qui, au premier coup-d'œil semble paradoxale, et que Roberval a présentée comme un cas curieux de la statique.

2. Les ponts levis sont au nombre des systèmes

dans lesquels la disposition relative des pièces composantes peut changer dans le mouvement du système. La condition principale qu'ils aient à remplir est cependant d'être en équilibre dans toutes les positions, pour éviter d'employer tant d'hommes à leur manœuvre, et pour n'avoir pas à craindre d'accélération dans leur mouvement de descente.

La pièce qui forme le pont proprement dit s'appelle, dans ce genre de construction, tablier du pont. C'est un assemblage de quatre ou cinq pièces rectangulaires placées dans le sens de la longueur du pont et qu'on nomme pour cela *longerons*. Ces pièces sont maintenues dans leur position parallèle par deux fortes traverses dans lesquelles elles sont encastrées et dont l'une porte les tourillons ou l'axe de rotation du pont, tandis que l'autre termine le pont du côté opposé aux tourillons. Cette dernière se nomme *chevet*. Le tout est recouvert de forts madriers, puis ensuite de planches pour former le passage.

La question de la manœuvre du pont se réduit donc à enlever le centre de gravité de cet assemblage à une hauteur égale à sa distance aux tourillons : mais pour les raisons que j'ai dites, il faut faire en sorte qu'un autre poids descende en même tems de manière à satisfaire au principe général d'équilibre. Or c'est ce qui se fait de plusieurs manières, dont je vais vous citer les principales.

Pont levis à bascule. C'est le plus simple de tous : on peut le considérer comme un pont à double tablier : toute la difficulté consiste à disposer les points d'appui *ff* des tourillons, de manière à ce que le centre de gravité du système soit toujours sur l'axe de révolution : alors l'équilibre a lieu dans toutes les situations et il n'y à que les frottemens à vaincre (fig. 9.)

Pont levis à flèche. Dans ce pont le tablier n'a pas de bascule, il se termine aux tourillons A, (fig. 10.) Au-dessus de lui est placé un assemblage en bois tournant sur un axe A', lequel est sur le même plan vertical AA' que les tourillons du tablier ; la partie antérieure A'B' de cet assemblage est composé de deux pièces de bois qu'on nomme flèches et qui sont liées au tablier par des chaînes BB' de manière à ce que la figure BB'AA' soit un parallélogramme.

Le centre de gravité de cette partie antérieure et du reste A'D de l'assemblage se trouve quelque part en *c'* du côté opposé au centre de gravité C du tablier. Si l'on veut connaître la relation d'équilibre, on n'a qu'à nommer P le poids des flèches et de leurs culées, Q le poids du tablier, et il ne s'agira que de trouver les conditions d'équilibre entre P et Q. Or il est visible qu'on peut toujours faire en sorte que pour les diverses positions du pont AC et A'C' soient parallèles, alors l'équation d'équilibre est visiblement

$$P \times A'C' = Q \times AC$$

équation dans laquelle on ne donne que Q et AC, et qui par conséquent, tout en se conformant aux conditions voulues, peut se résoudre d'une infinité de manières. Ordinairement, après avoir calculé approximativement la position de C', on laisse une forte pièce de bois chargée de fer ou de plomb, mobile dans l'assemblage, afin de pouvoir la faire reculer ou avancer jusqu'à ce que le point C' soit exactement placé comme il est nécessaire.

Pont à contre-poids mobile. (fig. 12) Ce pont que j'ai imaginé pour le service des places de guerre, se compose d'un tablier AD dont le centre de gravité est en C. Autour des tourillons TT tournent deux pièces de bois chargées de fer et dont le poids est plus fort que celui du tablier. Ces pièces sont en outre fixées par des charnières B à des pièces de longueur tournant autour des points fixes F. La distance FB est la plus longue possible, BC est égal à AC.; c' est le centre de gravité de la pièce BE. Lorsqu'on veut lever le pont on tire le point B avec la chaîne, et le pont se lève : le contraire a lieu quand on veut le baisser. La théorie de ce pont est basée sur les considérations que voici.

Supposons (fig. 13) que le point B soit assujetti à se mouvoir sur une verticale, tandis que les deux droites AD et BE ne cessent pas d'avoir

un point commun T. Soit en C un poids Q qui sera celui du tablier, en C′ un autre poids P qui sera celui du contre-poids, cherchons le centre de gravité du système.

Menons d'abord la droite horizontale AG, il est visible que TF sera égal à BT et aussi à AT. En effet on a à cause du triangle isoscèle ATB:

$$\text{Angle ABT} = \text{angle BAT}$$

puis à cause du triangle rectangle BAF on a aussi

$$\text{Angle ABT} = 90^\circ - \text{angle AFB}$$

et $$\text{Angle BAT} = 90^\circ - \text{angle TAF}$$

donc $90^\circ - \text{angle AFB} = 90^\circ - \text{angle TAF}$

ou $$\text{Angle AFB} = \text{angle TAF}$$

d'après cela le triangle ATF est isocèle et l'on a

$$AT = TF$$

par suite de cela on voit que FC′ est toujours constant quels que soient les mouvemens du système.

Menons maintenant la droite horizontale TH, elle coupera en deux parties égales l'angle CTC′, ainsi l'on aura

$$\frac{CT}{CH} = \frac{C'T}{C'H}.$$

Or maintenant il est évident que les triangles CTH et CAG sont semblables entre eux, ainsi que

les triangles C′TH et C′FG, en sorte que l'on doit avoir

$$\frac{CT}{CH} = \frac{CA}{CG}$$

et

$$\frac{C'T}{C'H} = \frac{C'F}{C'G}$$

Les deux premiers membres de ces équations étant égaux, les deux seconds doivent l'être aussi, ainsi l'on a

$$\frac{CA}{CG} = \frac{C'F}{C'G}$$

d'où l'on tire en observant que $C'F = C'T - AT$

$$\frac{C'G}{CG} = \frac{C'T - AT}{CA}$$

équation qui aura lieu pour toutes les positions du pont, c'est-à-dire que la droite horizontale et invariable AG coupera la droite variable CC′ en deux parties CG et C′G qui seront toujours dans un même rapport. Si donc les poids P et Q étaient tels que leur centre de gravité passât par le point G dans une seule position, il y passerait également dans toutes et par suite le centre de gravité ne quitterait pas la droite horizontale AG.

Or ce cas serait, comme nous le savons, celui où l'équilibre aurait lieu de lui-même dans toutes les positions du système, ainsi notre but serait

rempli. Il ne s'agit donc que de trouver la relation nécessaire entre P et Q pour que la condition précédente soit satisfaite.

Pour cela vous savez que l'on doit avoir

$$\frac{P}{Q} = \frac{CG}{C'G}$$

ou

$$\frac{P}{Q} = \frac{CA}{C'T - AT}$$

Dans cette équation il n'y a de donné que AC et Q, le reste est arbitraire, ainsi on peut disposer de AT, de C'T et de P de manière à résoudre la question de plusieurs manières. Il faudra seulement observer de ne pas faire P ni C'T trop grands, ce qui augmenterait la dépense et les causes de détérioration du pont. Dans le modèle que j'ai fait construire, j'avais pris les données suivantes (fig. 12) :

$$P = 2Q, CA = \frac{2}{5} AD, AT = \frac{1}{5} AD, C'T = \frac{2}{5} AD,$$

ces proportions faisaient un bon effet et le système marchait facilement.

On observe que le point B dans la construction au lieu de marcher sur une verticale, se meut suivant un arc de cercle AB dont le centre est en F. Cela devait se faire pour assurer la solidité du mouvement. D'ailleurs, si à la vérité dans ce

cas le centre de gravité G au lieu de décrire une droite horizontale, se meut sur un arc de cercle, il n'en résulte aucun inconvénient, vu que cet arc de cercle étant concave vers le haut, la pesanteur tend à agir pour faire descendre le pont quand il est totalement levé, et pour le lever quand il est abaissé. Il résulte de là qu'il n'y a point de choc sensible en fermant ou en ouvrant le pont, et d'une autre part que la pesanteur aide à vaincre les premières résistances qu'on éprouve lorsqu'on veut changer le tablier de position, chose qui est toujours avantageuse.

On arrête le pont dans sa position horizontale en fixant au moyen d'une vis le chevet du pont sur l'extrémité des contrepoids.

3. Parmi les systèmes variables de forme, il en est deux en particulier qui se représentent fréquemment dans les arts, ce sont les cordes et les chaînes. La théorie des cas d'équilibre qui s'y rapportent est très-compliquée lorsqu'on considère ces systèmes dans leur véritable état, c'est-à-dire avec les frottemens et les autres résistances qu'elles produisent par leur roideur et leur élasticité : ce qui provient en grande partie du peu de données qu'on a sur la nature de ces résistances, et sur la manière de les introduire dans le calcul. Nous essayerons pourtant de donner quelques notions sur cette partie importante de la statique des machines, malgré la difficulté d'arriver sans calculs



transcendans à quelques résultats des plus importans. Nous commencerons par considérer les cordes et les chaînes comme des élémens linéaires absolument inextensibles et flexibles, puis nous reviendrons sur les cas où il faut tenir compte du frottement et des autres circonstances inhérentes à la nature des chaînes et des cordes.

4. Soit d'abord, (planche 14 fig. 1) un cordon ou fil flexible et inextensible FAF′ attaché par ses deux extrémités à deux points fixes F et F′, et sollicité en A par une force P au moyen d'un cordon PA et d'un anneau A dans lequel passe la corde FAF′. Cherchons les conditions d'équilibre.

Il est visible qu'au moyen de l'anneau A, le cordon doit avoir la même tension d'un bout à l'autre entre ses deux extrémités, ainsi on pourra le concevoir comme représentant deux forces égales, l'une dirigée suivant AF l'autre suivant AF′ et toutes les deux faisant équilibre à la force P.

D'après cela, on voit que la direction de la force P doit partager en deux parties égales l'angle FAF′ des deux forces ou tensions produites par les deux portions du cordon.

Si l'on faisait marcher l'anneau dans toutes les positions qu'il peut prendre il décrirait une courbe AA′A″ qu'on nomme *ellipse* et dans laquelle les points F et F′ prennent le nom de foyer. Dans cette nouvelle façon de voir le mouvement du

point A on peut le considérer comme forcé à glisser sur la courbe AA′A″ et si l'on cherchait alors l'équilibre, il serait facile de voir, d'après ce que nous connaissons déjà, que la force P qui passe sur la courbe doit être normale en A à cette courbe. Cependant elle n'en serait pas moins assujettie à couper en deux parties égales l'angle des droites FA et F′A, qu'on nomme rayons vecteurs de l'ellipse; de là vous pouvez conclure que *dans l'ellipse, la normale en un point partage toujours en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs aboutissant à ce point.*

Cette jolie démonstration d'un principe purement géométrique est de Roberval, et peut vous servir à voir comment des inductions mécaniques on peut descendre dans de certains cas à de certaines propriétés de figures qu'il serait souvent difficile de reconnaître autrement.

Si la force P au lieu d'agir sur le cordon flexible au moyen de l'anneau A, le sollicitait par un nœud fixe (fig. 2) alors les conditions d'équilibre changeraient : il ne serait plus nécessaire que la force P partageât en deux l'angle FAF′, il suffirait pour l'équilibre que la force passât dans cet angle, et si l'on voulait alors connaître les rapports entre la force F et les tensions t et t' des cordons FA et FA′, il faudrait construire le parallélogramme BDAC, dans lequel les droites CA, AB, AD, représenteraient respectivement t, P, et t'.

On voit ici que les tensions t et t' sont inégales, d'où il suit que si l'on voulait former l'équilibre au moyen d'un tel système il faudrait donner des grosseurs différentes aux cordes, afin de ne pas s'exposer à rompre celle qui aurait la plus grande tension à subir et à donner sans raison un trop grand diamètre à celle qui aurait le moins d'effort à supporter. Ces considérations si simples sont pourtant d'un haut intérêt pour l'économie et la sûreté des appareils dans lesquels on a besoin de se servir d'assemblages en cordes ou en chaînes.

5. En passant du simple au composé il vous sera naturel de rechercher les conditions d'équilibre d'un *polygone funiculaire*, c'est-à-dire d'un assemblage de cordons (fig. 3) FAA'A''F' fixé par les deux bouts en F et F', et sollicité par des forces P P' P''.

Ce problème peut être présenté de plusieurs manières qui peuvent en rendre la solution plus ou moins mal-aisée : en total il ne présente guère pourtant d'autres difficultés que celle de l'écriture analytique des conditions générales d'équilibre, et le plus souvent les solutions des cas particuliers sont fort simples.

Si vous avez, par exemple, la position des points A, A', A'', F et F' ainsi que la direction des forces P, P', P'' il vous sera bien aisé de déterminer la tension t, t', t'', t''' des cordons AF, AA', A'A'', A''F' et les rapports d'intensité des forces P, P', P''.

Pour cela construisons les parallélogrammes ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' nous aurons visiblement

$$\frac{t}{\mathrm{BC}} = \frac{t'}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{t'}{\mathrm{B'C'}} = \frac{t''}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{P'}}{\mathrm{A'B'}}$$

$$\frac{t''}{\mathrm{B''C''}} = \frac{t'''}{\mathrm{A''C''}} = \frac{\mathrm{P''}}{\mathrm{A''B''}}.$$

Or puisque l'on a

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{AB}} = \frac{t'}{\mathrm{AC}}$$

et

$$\frac{\mathrm{P'}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{t'}{\mathrm{B'C'}}$$

on en conclut facilement

$$\frac{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{AB}}}{\frac{\mathrm{P'}}{\mathrm{A'B'}}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}} \times \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\frac{t'}{\mathrm{AC}}}{\frac{t'}{\mathrm{B'C'}}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{AC}}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} \times \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{AC.}};$$

De même, puisque l'on a

$$\frac{\mathrm{P'}}{\mathrm{A'B}} = \frac{t''}{\mathrm{A'C'}}$$

et

$$\frac{P''}{A''B''} = \frac{t''}{B''C''}$$

on en conclut aussi

$$\frac{P}{P''} = \frac{A'B'}{A''B''} \cdot \frac{B''C''}{A'C'}.$$

et en multipliant la valeur de $\frac{P'}{P''}$ par celle de $\frac{P}{P'}$,

on trouve enfin pour $\frac{P}{P''}$,

$$\frac{P}{P''} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{AC} \cdot \frac{B'C'}{A'C'} \cdot \frac{B''C''}{A''B''} = \frac{AB}{A''B''} \cdot \frac{B'C'}{AC} \cdot \frac{B''C''}{A'C'}.$$

d'où résulte facilement que sitôt qu'on connaît P, on connaît aussitôt P' et P'', dont les valeurs sont ainsi

$$P' = P \cdot \frac{A'B'}{AB} \cdot \frac{AC}{B'C'}$$

$$P'' = P \cdot \frac{A''B''}{AB} \cdot \frac{AC}{B'C'} \cdot \frac{AC'}{B''C'}$$

d'où l'on tire

$$\frac{t}{BC} = \frac{P}{AB}$$

$$\frac{t'}{AC} = \frac{P}{AB}.$$

$$\frac{t'}{A'C'} = \frac{P}{A'B'} \cdot \frac{A'B'}{AB} \cdot \frac{AC}{B'C'} = \frac{P}{AB} \cdot \frac{AC}{B'C'},$$

$$\frac{t''}{A''C''} = \frac{P}{A''B''} \cdot \frac{A''B''}{AB} \cdot \frac{AC}{B'C'} \cdot \frac{A'C'}{B''C''} = \frac{P}{AB} \cdot \frac{AC}{B'C'} \cdot \frac{A'C'}{B''C''}$$

et par suite

$$t = P \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$t' = P \cdot \frac{AC}{AB}$$

$$t'' = P \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{A'C'}{B'C'}$$

$$t''' = P \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A''C''}{B''C''}$$

ce qui donne

$$\frac{t'}{t} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{t''}{t} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{A'C'}{B'C'}$$

$$\frac{t'''}{t} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A''C''}{B''C''}$$

et enfin

$$t' = t \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$t'' = t \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{A'C'}{B'C'}$$

$$t''' = t \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A''C''}{B''C''}$$

formules très-faciles à retenir et qui font connaître t'. t'', t''' quand on connaît t, lequel est lui-même connu en vertu de l'équation

$$t = P \cdot \frac{BC}{AB}$$

lorsqu'on connaît P.

Ainsi dans l'exemple que nous venons de traiter il suffira de connaître une seule des forces P, P′, P″, pour trouver de suite t, t', t'' et t'''.

Ce problème se présente quelquefois à résoudre dans les arts : on en trouve un exemple dans les harnais des chevaux, dans quelques systèmes de cordage employés dans la marine. Il est alors utile de connaître le moyen de le résoudre pour proportionner la force des cordons aux efforts qu'ils doivent supporter.

La nature vous offre un exemple curieux de la solution instructive de ce problème dans la toile de l'araignée : avec un peu d'attention vous la reconnaîtrez composée de fils de diverses grosseurs,

et proportionnés aux résistances que chacun doit supporter. D'après ce que nous venons de dire, vous concevez la possibilité de déterminer pour un semblable système la tension supportée par chaque cordon.

6. Le problème du polygone funiculaire peut encore se présenter autrement que nous ne l'avons supposé. Quel que soit le cas qui arrive, il faudra toujours tâcher de procéder ainsi que nous l'avons fait. Cependant je vais essayer de vous donner une idée des conditions générales de solution.

Dans le polygone funiculaire précédent, nous avons eu à considérer :

1° Les tensions t, t', t'', t''' des quatre cordons;

2° Les forces P, P', P'', appliquées aux trois sommets A, A', A'' du polygone;

3° Les trois parallélogrammes ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'', ayant chacun sa diagonale et les deux côtés adjacens;

En tout trois forces, quatre tensions et six rapports entre des lignes, ou treize choses différentes dont la détermination est nécessaire pour constater l'équilibre.

Or entre ces treize choses nous n'avons pu établir que les six équations de relation suivante :

$$P' = P \times \frac{AC}{AB} \cdot \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$P'' = P \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A''B''}{B''C''}$$

$$t = P \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$t' = t \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$t'' = t \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{A'C'}{B'C'}$$

$$t''' = t \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{A''C''}{B''C''}$$

d'où il résulte qu'il faut connaître sept des treize choses ci-dessus pour pouvoir déterminer les autres.

C'est ce qui nous était effectivement donné dans l'exemple précédent, puisque nous connaissions P et les trois parallélogrammes. Mais il se pourrait faire que cela n'arrivât pas. Alors le problème serait indéterminé, et il y aurait une infinité de manières d'établir l'équilibre. Dans tout autre cas le problème pourrait être résolu, et vous pourriez trouver au moyen des sept quantités connues toutes celles qui seraient encore à connaître.

7. Pour faire de cela une application, supposons, par exemple, qu'on demande que les tensions des cordons soient égales et que les angles du polygone funiculaire soient égaux. Il est visible que tous les parallélogrammes ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' doivent être semblables, ainsi on aura au lieu des six rapports

$$\frac{AC}{AB},\ \frac{BC}{AB},\ \frac{A'C'}{A'B'},\ \frac{B'C'}{A'B'},\ \frac{A''C''}{A''B''},\ \frac{B''C''}{A''B''},$$

à considérer seulement les deux rapports

$$\frac{AC}{AB},\quad \text{et}\ \frac{BC}{AB},$$

et les six équations deviendront

$$P' = P \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$P'' = P \cdot \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$$

$$t = P \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$t' = t \cdot \frac{AC}{BC}$$

$$t'' = t \cdot \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$$

$$t''' = t \cdot \frac{\overline{AC}^3}{\overline{BC}^3}$$

ou, en observant que t doit être égal à t', on trouve $\frac{BC}{AC} = 1$ et par suite

$$P' = P, \; P'' = P$$

$$t = P \cdot \frac{BC}{AC}$$

$$t = t' = t'' = t'''$$

Ainsi il ne nous reste que t, P et $\frac{BC}{AB}$ d'inconnus : mais nous voyons déjà que toutes les forces P, P', P'' sont égales, qu'elles partagent en deux parties aussi égales les angles A, A', A'', enfin il ne nous faudra que la connaissance d'un élément de plus pour que tout soit déterminé.

8. Dans tout ce qui précède, je n'ai pas fait entrer une donnée qu'on ne doit cependant pas négliger; la longueur du cordon et celle de ses divisions. Je l'ai fait à dessein pour simplifier l'exposé du problème, et en cela j'ai eu le droit d'en agir ainsi, parce que rien n'empêche de supposer qu'on soit maître de la longueur du cordon et de la place ou l'on fait les nœuds.

Cependant, pour traiter la chose avec toute sa généralité, il faut faire entrer cette donnée, qui le plus souvent est imposée par des circonstances dont on n'est pas le maître. Or c'est ce qu'il est très-facile de faire, quelle que soit d'ailleurs la nature du polygone funiculaire que l'on se donne, qu'il soit simple comme dans la figure 3, ou compliqué comme un filet ou un réseau d'espèce constante.

Soit donc (planche 14, fig. 4) AA′ une portion de cordon appartenant à ce système; soient P et P′ deux forces appliquées l'une en A l'autre en A′, et P″, P‴, P⁗, etc. les autres forces appliquées au système funiculaire : si l'on admet que l'équilibre ait lieu, rien n'empêche de considérer tout le reste du système, sauf le cordon AA′, comme solide. Et alors on aura un groupe de forces agissant d'un côté en A sur le cordon, et un autre groupe agissant sur ce cordon en A′.

Or il est visible que pour que ces deux groupes se fassent équilibre, il faut :

1° Qu'ils tirent le cordon en sens contraire;

2° Que la résultante de chaque groupe passe par la direction du cordon;

3° Enfin que les deux résultantes soient égales.

De ces trois conditions, la première et la troisième sont précisément celles qui se rapportent à l'équilibre d'un corps solide. Ainsi il faut d'abord que le système soit tellement disposé que toutes les forces soient en équilibre en vertu de leur grandeur et de leur position, comme si le système était solide : ainsi, une fois cette condition obtenue pour un cordon, elle a lieu pour tous les cordons, et on n'aura plus besoin que de vérifier pour chacun d'eux la seconde condition, et pour cela il ne faudra que bien connaître les forces qui agissent des deux côtés du cordon. Or c'est ce qui n'est pas toujours facile dans un polygone funiculaire

fermé ou réselé à la manière d'un tissu à mailles, par exemple ; alors il faut supposer qu'on ait appliqué en A et A′ deux forces f et f', dirigées dans le sens du cordon, et chercher s'il est possible avec ces deux forces de faire équilibre au système des forces P, P′, P″, etc., en leur supposant une valeur égale et une action propre à tendre le cordon : l'expression analytique de cette dernière condition ajoutée à celle de l'équation générale d'équilibre donnera tout ce qui est nécessaire pour trouver les relations entre les grandeurs des forces, les tensions des cordons, et la position des points sommets ou nœuds du polygone funiculaire.

Au reste, tout l'appareil de calcul nécessaire pour arriver à ce résultat analytique ne serait pas compensé pour vous par les conséquences qu'il pourrait vous fournir. Je n'insisterai donc pas davantage sur ce sujet, et je me bornerai à vous recommander la méthode que je vous ai indiquée, et qui peut servir dans le plus grand nombre de cas, en y joignant ce qui vous paraîtra convenable des considérations précédentes.

9. La théorie du polygone funiculaire est principalement employée en mécanique pour servir de prolégomène à celles de l'équilibre d'un système flexible particulier qu'on nomme la chaînette. La chaînette n'est autre chose qu'un cordon pesant attaché par ses deux bouts à des points fixes et

soumis ainsi librement à l'action de la pesanteur. Ce cordon ainsi placé affecte une courbure particulière, et pour arriver à la déterminer on suppose un polygone funiculaire d'une infinité de côtés très-petits et soumis à leurs points de jonction à l'action de forces parallèles à la verticale et égales entre elles : on parvient ainsi à une détermination très-élégante et fort inutile, non pas de la forme absolue de la courbe mais bien de l'inclinaison de ses tangentes en des points donnés.

Au reste cette courbe (fig. 5) jouit de quelques propriétés qu'il peut être utile de remarquer :

D'abord, d'après ce que nous avons vu déjà, le système étant soumis à la seule force de la pesanteur, son centre de gravité doit être le plus bas possible. D'après cela il est visible qu'une quelconque des portions AF, AA', A'F' de la courbe doit avoir aussi son centre de gravité le plus bas possible. Ainsi chaque portion de la chaînette est aussi une chaînette.

En outre si l'on vient à renverser la chainette comme on le voit en $Faa'F'$, en lui conservant exactement sa forme, son centre de gravité sera alors le plus élevé possible ; or, comme nous le savons aussi, c'est encore un des cas d'équilibre d'un système pesant, celui de l'équilibre non stable, ainsi le cordon sera encore en équilibre dans ce cas.

Mais ce dernier état d'équilibre ne changerait pas, si au lieu de conserver le fil ou le cordon on

y substituait une série de sphères infiniment petites, égales et pesantes dont les centres seraient distribués le long de la courbe de la chaînette, et réagissant les unes sur les autres par pression. Ainsi un pareil système placé dans un plan bien vertical y serait en équilibre de lui-même, ce qui du reste est plus curieux à savoir qu'utile.

10. Cependant il est une application en grand de la théorie du polygone funiculaire que je ne dois pas passer sous silence, c'est la construction des ponts suspendus : on appelle ainsi les ponts qui au lieu d'être soutenus par des piles et des arches comme les ponts en pierre, ou des travées comme les ponts en bois, sont attachés à des chaînes ou à des assemblages de tiges de fer infléchis dans la forme d'une corde pesante et flexible, fixée par deux bouts à des appuis invariables.

Ces ponts dont l'idée première est fort ancienne, se trouvent déjà indiqués dans un ouvrage de Scammozzy, célèbre architecte italien, dans son ouvrage *del idea archi* imprimé en 1615. On trouve déjà antérieurement à cette époque des constructions en corde et même en cuir analogues à celle des ponts suspendus ; mais il paraît certain que l'Angleterre a donné le premier exemple d'une application régulière de ce mode important de communication, et c'est encore elle qui l'emporte aujourd'hui, par la grandeur, la solidité et la perfection de ses ouvrages dans ce genre.

Un pont suspendu se compose principalement d'un tablier ou plate-forme horizontale en charpente ou en fer, qui est destiné au passage des voitures et des piétons. Ce tablier est soutenu par des tirans verticaux en fer, assemblés d'un côté par des clavettes avec les traverses du tablier et de l'autre par une articulation à la chaîne ou aux chaînes de suspension. Cette dernière est la partie importante de la construction : c'est un assemblage de barres de fer forgé, réunis par leurs extrémités au moyen de boulons, et librement suspendues entre deux points d'appui fixes, ordinairement en maçonnerie, quelquefois aussi en fer de fonte, au-dessus desquelles passent les chaînes pour venir s'enfoncer profondément dans le sol où on les fixe au moyen de poids considérables ou de systèmes très-solides de maçonnerie. Quelquefois la chaîne principale est simple, quelquefois il y en a plusieurs de chaque côté du pont. Le pont d'Hammersmith, l'un des plus beaux qui existent est dans ce dernier cas ; il est soutenu par 8 chaînes, formant quatre couples de chaînes enfermés dans quatre plans verticaux différens : d'autres ne renferment que trois couples de chaînes partageant le tablier du pont en deux parties égales et parallèles.

Quoi qu'il en soit de ces dispositions particulières, il y a des principes communs à toutes et que vous concevrez facilement. Je vous en toucherai

quelques mots, et pour nous mieux entendre je prendrai pour exemple la figure 7, planche 14, qui représente le pont de Hanunersmith.

Une des premières conditions à remplir c'est de disposer les chaînes de telle façon que toutes les barres qui la composent soient chacune soumise à une pression égale; sans cela il faudrait donner à toutes les barres et aux boulons qui les attachent, des forces et par suite des dimensions tout-à-fait différentes.

Ainsi on cherche à donner à la courbe la forme d'une chaînette, puisque dans cette courbe la tension est la même d'un bout à l'autre. Il ne faut pour se convaincre de la possibilité d'adopter cette courbe, qu'observer que chaque tirant vertical supporte une portion égale du poids du pont, et qu'ainsi à chaque articulation on peut supposer une force à peu près constante, ce qui, vu le grand nombre des articulations et le peu de dimensions des barres par rapport à celle du pont, fait rentrer la recherche de l'équilibre du système dans celui d'un polygone funiculaire pesant d'un nombre infini de côtés.

Il faut en outre que la résultante des forces agissant sur les chaînes passe par le pied des piliers *a*, *a*, pour ne pas être exposé à les renverser.

Enfin il est nécessaire de pouvoir calculer précisément la tension des chaînes pour déterminer

exactement le poids qui doit servir à équilibrer cette tension.

Toutes ces données se trouvent facilement par des calculs analogues à celui que je vous ai indiqué lorsqu'on veut se contenter d'une approximation peu considérable, ce qui est permis lorsqu'il s'agit de ponts de peu de valeur et d'étendue; mais lorsqu'on est obligé, pour de grandes constructions, d'allier à la fois l'économie et la solidité, alors il faut se résoudre à entrer dans des recherches compliquées et difficiles, et dont il ne faut pourtant laisser échapper aucun élément.

Il y a enfin d'autres observations encore à faire et qu'il ne faut point négliger; mais elles tiennent plutôt à l'art de l'ingénieur qu'à celui du mécanicien : ainsi nous n'en parlerons point ici et il suffit de vous avoir donné l'idée de ces constructions utiles et hardies qui paraissent devoir remplacer la plupart des ouvrages de la même destination, ne fût-ce qu'à cause de la grande économie qu'elles procurent. (*)

11. Je terminerai ce qui concerne les systèmes variables par quelques observations sur l'équilibre produit par le frottement des cordes ou des courroies.

(*) Le pont suspendu de Hammersmith, malgré sa longueur qui est d'environ 800 pieds entre les barrières qui le ferment, n'a coûté que 80,000 livres sterling, c'est environ 2500 francs seulement par pied courant.



Lorsqu'une corde est appliquée sur une surface angulaire et sollicitée par deux forces P et Q, il peut arriver que ces deux forces soient égales ou inégales, mais dans les deux cas il y aura frottement de la corde sur le sommet *a* de la surface, sommet que nous pouvons considérer comme une très-petite surface plane faisant des angles égaux avec les lignes *ab* et *ab'* : le frottement du reste sera nul sur les faces *ba* et *b'a* puisque les cordes étant tirées dans le sens de leur longueur, elles n'agissent en aucune manière normalement à ces surfaces. Or, le frottement produit sur *a* peut influer d'une manière remarquable sur différens cas d'équilibre ; nous en dirons donc quelques mots, en commençant par le cas des forces P et Q égales.

12. Les deux forces P et Q étant égales entre elles on trouvera leur résultante en construisant le parallélogramme isoscèle *abdb'*, dont la diagonale *ad* représentera la résultante en grandeur et en direction ; d'après cela soit R cette résultante on aura

$$R = P \times \frac{ad}{ab}.$$

Et si f est le rapport du frottement à la pression, le frottement produit en *a*, sera

$$f.\ R = \text{ou} = f \times P \times \frac{ad}{ab}.$$

Soit maintenant une corde enroulée autour du polygone régulier *abcdefgh*, de manière à ce que sa tension soit partout la même, c'est-à-dire égale à P, elle exercera une pression sur chaque angle *abc*, et cette pression sera de la même nature que celle dont nous venons de parler; ainsi construisant le parellélogramme *abcd*, *bd* sera la résultante des tensions P au point *b*, et l'on aura en la nommant R,

$$R = P \times \frac{bd}{ab.}$$

Or maintenant il est visible que le triangle *abd* est semblable au triangle *aob*, on a donc :

$$\frac{bd}{ab} = \frac{ab}{ao.}$$

d'où

$$R = P \times \frac{ab}{ao.}$$

et le frottement *f*. R sera

$$f.\ R = f.\ P.\ \frac{ab}{ao.}$$

On aura aussi pour les frottemens exercés en *a* et *c*, les valeurs

$$P \times \frac{ab}{ao}$$

Et

$$P \times \frac{bc}{ao}$$

ce qui donne pour la somme de tous les frottemens :

$$f.\left(P \times \frac{ha}{ao} + P \times \frac{ab}{ao} + P \times \frac{bc}{ao}\right)$$

$$= f.\ P.\ \frac{ha + ab + bc}{ao.}$$

Décrivons maintenant un cercle inscrit à ce polygone, il touchera les côtés ah et cd en i et i', milieux de ces côtés; ainsi l'arc de polygone $iabci'$ sera égal à $ha + ab + bc$, et l'on aura pour la somme des frottemens produits, cette autre expression

$$f.\ P \times \frac{\text{arc. } iabci'}{ao}.$$

Si le nombre des côtés du polygone était infini, les points abc seraient sur une même circonférence (fig. 10) et l'arc polygonal se confondrait avec l'arc ii' de la circonférence embrassé par la corde, en sorte qu'on aurait pour le frottement :

$$f.\ P.\ \frac{\text{arc. } ii'}{ao,}.$$

Ainsi, dans une poulie embrassée par une corde le frottement produit à la circonférence est

proportionnel à l'arc embrassé par la corde et réciproque au rayon : lors donc qu'on veut mettre en mouvement un système au moyen du frottement d'une corde enroulée sur une poulie, il y aura avantage à faire embrasser à la corde le plus grand arc possible de la poulie. Quant au rayon de la poulie, il est absolument indifférent, ce qui parait d'abord assez singulier, mais ce qui est facile à concevoir en observant que le moment du frottement, qui est la mesure de son énergie pour faire tourner le système, est égal à

$$f \,.\, \mathrm{P} \,.\, \frac{\mathrm{arc.}\; ii'}{ao} \times ao = f \,.\, \mathrm{P} \,.\, \mathrm{arc.}\; ii'$$

quantité absolument indépendante de *ao*, c'est-à-dire du rayon. Ainsi vous voyez que le diamètre de la poulie motrice peut être négligé, ce qui permet de se conformer à d'autres conditions, et ce qui vous évitera de tomber dans l'erreur de ceux qui employent de grandes poulies pour faire tourner de grands corps et réciproquement ; les grandes poulies n'offrant que l'avantage de permettre d'embrasser de plus grands arcs *ii'*, ce qui dans plusieurs cas peut être remplacé par le redoublement de la corde autour de la poulie, ou par l'emploi de plusieurs cordes. Dans ce dernier cas, le frottement produit est équivalent au produit du nombre des cordes par le frottement exercé par chacune d'elles : or c'est cet avantage que l'on obtient en

employant des courroies au lieu de cordes : une courroie pouvant être considérée à cause de son élasticité comme un assemblage de cordes ou de fibres minces qui se tendent toutes sur la poulie, il s'ensuit que par son moyen on obtient une pression non-seulement proportionnelle à l'arc embrassé, mais encore au nombre des fibres ou à la largeur de la courroie.

Si l'on voulait connaître la résultante de toutes les pressions exercées sur l'axe de la poulie, il faudrait avoir recours aux méthodes de composition des forces dont je vous ai déjà entretenu. On trouve alors les résultats suivans :

1° *La résultante de toutes les pressions sur l'axe est perpendiculaire à la corde ii' de l'arc embrassé.*

2° *Son intensité est proportionnelle à la longueur de cette corde, en sorte qu'elle est la plus grande possible lorsque les cordons ou les courroies sont parallèles, et qu'elle est nulle lorsque la corde embrasse la circonférence entière de la poulie.*

3° *Dans ce dernier cas la direction de la résultante est indéterminée, et il n'y a pas de pression et par conséquent pas de frottement sur l'axe.*

Voici comment on arrive à ces résultats : divisons l'arc *ii'* en une infinité de parties égales ; à chacune de ces parties correspondra une pression normale à la courbe et passant par conséquent par son centre. (Planche 15, fig. 3.)

Soit *ao* la direction d'une de ces pressions,

elle aura pour mesure la quantité $P \cdot \frac{ab}{ao}$, ab étant un des arcs formés par la division.

D'une autre part à tous les points de l'arc ii' correspondant des forces égales entre elles et dirigées vers le centre, tout ce système sera symétrique par rapport à la droite oc qui coupe l'arc ii' en deux et passe par le centre du cercle, point commun à toutes les pressions.

D'après cela décomposons la pression exercée en a en deux autres, l'une parallèle et la seconde perpendiculaire à ao, et supposons la chose faite pour toutes les autres pressions élémentaires, nous aurons ainsi un groupe de forces parallèles à oc dont la somme sera la résultante cherchée et un autre groupe de forces perpendiculaires à cette direction et qui se détruiront : cherchons la valeur de chacune des premières.

Nous avons pour celle qui passe en a la valeur

$$P \cdot \frac{ab}{ao}.$$

Menons ac perpendiculaire sur oc, la composante de la force précédente suivant ac sera

$$P \cdot \frac{ab}{ao} \cdot \frac{oc}{ae} = P \times \frac{ab \times oc}{ao^2}$$

maintenant des points a et b, abaissez des perpendiculaires sur ii', puis menez bd parallèle à ii' ; le triangle rectangle abd sera semblable au

triangle *oac*, pour avoir tous leurs côtés respectivement perpendiculaires entre eux, d'où il suit qu'on a :

$$\frac{oc}{ao} = \frac{bd}{ab}$$

et

$$\frac{oc}{ao} = \frac{ef}{ab}$$

à cause que *ef* est égal à *bd*.

On tire de là

$$oc \times ab = ao \times ef$$

et par suite pour la composante de la pression

$$P \times \frac{ef}{ao.}$$

C'est-à-dire que chaque composante partielle est égale à P divisé par le rayon et multiplié par la hauteur de l'arc *ab* mesurée sur la corde *ii'*, et comme P divisé par le rayon est constant, il en résulte que la somme des composantes est égale à $\frac{P}{ao}$ multiplié par la somme des hauteurs de tous les arcs élémentaires de *ii'* mesurées sur la corde *ii'*.

Or la somme de toutes ces hauteurs est égale à la hauteur de l'arc *ii'* lui-même mesurée sur la corde *ii'*, c'est-à-dire à la longueur de la corde *ii'*, d'où il suit que la résultante entière est égale à

$$P \times \frac{ii'}{ao}$$

ce que nous avons indiqué tout à l'heure.

13. Passons maintenant au cas où les forces P et Q sont inégales, et cherchons les conditions d'équilibre entre ces deux forces en y faisant entrer le frottement.

Décomposons chacune des forces P et Q en deux autres, l'une suivant ao, l'autre suivant une droite perpendiculaire à ao. Appelons p et p' les composantes de P; q et q', celles de Q, p et q étant perpendiculaires à ao et p' et q' dirigées suivant cette droite, nous aurons :

$$p = P \times \frac{bc}{ab}.$$

$$p' = P \times \frac{ac}{ab}.$$

$$q = Q \times \frac{bc}{ab}$$

$$q' = Q \times \frac{ac}{ab}.$$

et par conséquent

$$p' + q' = (P + Q)\frac{ac}{ab}.$$

Or $p' + q'$ est la somme de deux forces normales

à la petite surface a, et qui produisent un frottement $f.(p'+q')$; ce frottement peut donc aussi être représenté par

$$f.(P+Q).\frac{ac}{ab}.$$

Si l'on voulait connaître la condition générale d'équilibre entre les deux forces P et Q, il faudrait maintenant observer que ces deux forces n'agissent l'une sur l'autre que par leurs composantes p et q; ainsi ce sont celles-là qui doivent entrer dans l'équilibre. Supposons donc que le point a commun aux deux parties de la corde qui transmettent l'action des forces P et Q ait parcouru un petit espace $\pm\rho$, le signe $+$ étant pris dans le sens du mouvement imprimé par la force P, les momens virtuels des forces p et q et du frottement $f.(p'+q')$ seront

$$\pm p.\rho,\ \mp q.\rho, \text{et } -f.(p'+q')\rho$$

et l'équation générale d'équilibre sera

$$\pm p.\rho\mp q.\rho-f.(p'+q')\rho=\text{o ou}<\text{o}.$$

ou

$$\pm p\mp q-f(p'+q')=\text{o ou}<\text{o}.$$

Lorsqu'on substitue à p et q, p' et q', leurs valeurs, cette équation devient

$$\pm P\frac{bc}{ab}\mp Q\frac{bc}{ab}-f.(P+Q)\frac{ac}{ab}=\text{ou}<\text{o}.$$

Lorsqu'on cherche le cas où le premier membre est seulement égal à o, on trouve les deux solutions

$$P.\left(\frac{bc - f.\,ac.}{ab}\right) = Q.\left(\frac{bc + f.\,ac}{ab}\right)$$

et $$P\left(\frac{bc + f.\,ac}{ab}\right) = Q\left(\frac{bc - f.\,ac}{ab}\right)$$

La première équation correspond au cas où l'équilibre existant, P est prête à l'emporter sur Q, et la seconde correspond au cas où c'est Q qui est prête à produire le mouvement; on tire de là :

$$\frac{P}{Q} = \frac{bc + f.\,ac}{bc - f.\,ac}$$

et $$\frac{P}{Q} = \frac{bc - f.\,ac}{bc + f.\,ac.}$$

Pour ce qui est de la valeur de $\frac{P}{Q}$ qui donne généralement l'équilibre, elle est évidemment, d'après la méthode que j'ai déjà indiquée,

$$\frac{P}{Q} = \frac{m.\frac{bc + f.\,ac}{bc - f.\,ac} + n.\frac{bc - f.\,ac}{bc + f.\,ac}}{m + n}$$

ce qui devient

$$\frac{P}{Q} = \frac{m.(bc + f.\,ac)^2 + n.(bc - f.\,ac)^2}{m + n.(\overline{bc}^2 - f.^2\overline{ac}^2.)}$$

m et n étant deux nombres entiers quelconques. Ce qui donne autant de cas d'équilibre que de valeurs de m et de n, c'est-à-dire une infinité.

14. Supposons maintenant une corde roulée autour d'une poulie, et voyons quelles sont les conditions pour l'équilibre entre les deux forces P et Q qui tendent cette corde en introduisant la condition du frottement, (planche 15, fig. 4.) Divisons l'arc embrassé par la corde en m petits arcs, m étant un nombre très-grand, nous pourrons considérer la corde comme enveloppée sur ces petits arcs de manière à figurer un polygone d'un nombre infini de côtés inscrit au cercle de la poulie et les frottemens comme exercés sur les sommets a, b, c, etc. de ce polygone.

Supposons en outre que la force P soit prête à l'emporter sur la force Q; la tension du cordon ne sera pas la même en P qu'en Q, mais elle variera dans l'étendue de l'arc AB, de manière à ce que la tension de chaque fraction ac de la corde sera prête à l'emporter sur la tension de la fraction adjacente ab. Dans cet espace on pourra appliquer la condition d'équilibre que nous avons déjà trouvée ci-dessus. Soit donc t_n la tension du cordon entre a et c, et t_{n+1} celle du même cordon entre b et a, nous aurons en construisant le parallélogramme $aba'c$, l'équation

$$\frac{t_n}{t_{u+1}} = \frac{bc + f \cdot aa'}{bc - f \cdot aa'}.$$

Mais il est évident que le triangle $aa'c$ est semblable au triangle aoc, d'où il suit

$$\frac{ac}{aa'} = \frac{ao}{ac} \text{ ou } = \frac{r}{ac}.$$

r étant le rayon du cercle.

D'un autre côté bc est évidemment égal à l'arc bac, d'où il suit qu'il est double de ac, ainsi :

$$bc = 2 . ac$$

et comme on a en même tems

$$ac = r . \frac{aa'}{ac}$$

on en tire

$$bc = 2\,r . \frac{aa'}{ac}.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{t_n}{t_{n+1}}$ on trouve

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{2\,r . \frac{aa'}{ac} + f . aa'}{2\,r . \frac{aa'}{ac} - f . aa'}$$

ce qui devient en ôtant aa' et en multipliant tout par ac

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{2\,r + f . ac}{2\,r - f . ac}.$$

Désignons maintenant par t la tension du cordon sur le premier arc, par $t_{,}$, celle du cordon sur le second, par $t_{,,}$, $t_{,,,}$, ... t_n, celles des cordons sur les autres arcs, enfin par t_m celle du cordon sur le dernier arc, nous aurons d'abord

$$t = \mathrm{P}, \quad t^m = \mathrm{Q},$$

et par suite du théorème que nous venons de trouver, en observant que tous les arcs *ac*, *ab*, etc. sont égaux chacun à $\frac{\mathrm{AB}}{m}$, ce que nous désignons par $\frac{\alpha}{m}$, nous aurons la série d'équations suivantes :

$$\frac{t}{t_{,}} = \frac{2\,r + f \cdot \frac{\alpha}{m}}{2\,r - f \cdot \frac{\alpha}{m}}$$

$$\frac{t_{,}}{t_{,,}} = \frac{2\,r + f \cdot \frac{\alpha}{m}}{2\,r - f \cdot \frac{\alpha}{m}}$$

$$\frac{t_{,,}}{t_{,,,}} = \frac{2\,r + f \cdot \frac{\alpha}{m}}{2\,r - f \cdot \frac{\alpha}{m}}$$

. . . .

$$\frac{t_{m-1}}{t_m} = \frac{2\,r + f\,.\,\frac{\alpha}{m}}{2\,r - f\,.\,\frac{\alpha}{m}}$$

multipliant toutes ces équations ensemble et observant qu'elles sont en nombre m, on trouve

$$\frac{t}{t_{\prime}} \times \frac{t_{\prime}}{t_{\prime\prime}} \times \frac{t_{\prime\prime}}{t_{\prime\prime\prime}} \times \ldots \frac{t_{m-1}}{t_m} = \left(\frac{2\,r + f\,.\,\frac{\alpha}{m}}{2\,r - f\,.\,\frac{\alpha}{m}}\right)^m$$

ou enfin $$\frac{t}{t_m} = \frac{P}{Q} = \frac{\left(2\,r + f\,.\,\frac{\alpha}{m}\right)^m}{\left(2\,r - f\,.\,\frac{\alpha}{m}\right)^m}$$

équation remarquable mais qui peut prendre une forme plus utile et plus simple.

Développons les deux binomes $\left(2r+f.\frac{\alpha}{m}\right)^m$, et $\left(2\,r - f\,.\,\frac{\alpha}{m}\right)^m$ nous aurons en désignant $2\,r$ par d et $f.\alpha$ par a

$$\left(d + \frac{a}{m}\right)^m = d^m + \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{m} \cdot d^{m-1} + \frac{m.m\text{-}1}{1.\ 2.}\ \frac{a^2}{m^2} d^{m-2}.$$

$$+ \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \ldots\ldots \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{a^n}{m^n}\ d^{m-n} + \ldots\ldots$$

et

$$\left(d-\frac{a}{m}\right)^m = d^m + \frac{m}{1}\cdot\frac{a}{m}.d^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.\ 2.}\ \frac{a^2}{m^2}\,d^{m-2}$$

$$\pm\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n}{n}\cdot\frac{a^n}{m^n}d^{m-n}+\text{etc.}.$$

le signe $\pm$ ayant lieu suivant que le terme qu'il doit affecter sera de rang impair ou pair.

Considérons pour le moment la valeur absolue de ce terme, elle est dans les deux développemens

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n}{n+1}\,\frac{a^n}{m^n}\cdot d^{m-n}$$

cette valeur peut se mettre sous la forme suivante

$$\frac{m}{m}\times\frac{m-1}{2.m}\times\frac{m-2}{3.m}\cdots\frac{m-n}{(n-1)m}\,a^n.\ d.^{m-n}$$

ou encore

$$1.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3m}\right)\cdots\times$$

$$\left(\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)m}\right)a^n.\ d^{m-n}$$

Or m étant un nombre infiniment grand et 1, 2, 3, ... n, des nombres finis on doit avoir

$$\frac{1}{2m}=0,\ \frac{2}{3.m}=0,\ \frac{3}{4m}=0,\ \ldots\ \frac{n}{(n+1).m}=0,$$

ce qui réduit le terme général à ceci

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n+1} a^n . d^{m-n}$$

ou

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n+1} \cdot \frac{a^n}{d^n} \cdot d^m .$$

Or maintenant il est facile de voir que cette valeur peut se mettre sous la forme

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{a}{2.d} \cdot \frac{a}{3.d} \cdots \frac{a}{(n+1.)d} \cdot d^m$$

ou

$$m \cdot \frac{a}{d} \cdot m \frac{a}{2d} \cdot m \frac{a}{3d.} \cdots \frac{ma}{(n+1)n+1.d} \frac{1}{m^n} d^m$$

valeur évidemment égale à celle-ci :

$$\left(m . \frac{a}{d}\right) . \left(m . \frac{a}{2\,d} - \frac{1}{2}\right)\left(m \frac{a}{3d} - \frac{2}{3}\right) \cdots$$

$$\left(m \cdot \frac{a}{(n+1)d} - \frac{n}{n+1.}\right) d^m \cdot \frac{1}{m^n.}$$

ou enfin

$$\frac{\frac{ma}{d}}{1} \times \frac{\left(\frac{ma}{d} - 1\right)}{2} \times \frac{\left(\frac{ma}{d} - 2\right)}{3} \cdots \frac{\left(\frac{ma}{d} - n\right)}{n+1} \cdot \frac{1}{m^n.} d^m .$$

d'après cela nos deux binomes prennent la forme

suivante en faisant $\frac{a}{d} = S$,

$$\left(d+\frac{a}{m}\right)^m = d^m + \frac{mS}{1} d^m . \frac{1}{m} +$$

$$\frac{mS}{1} \cdot \frac{mS-1}{2} d^m . \frac{1}{m^2} + \ldots\ldots$$

$$= d^m \left\{ 1 + \frac{mS.}{1}\left(\frac{1}{m}\right) + \frac{ms}{1} \cdot \frac{ms-1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \right.$$

$$\frac{mS-mS-1}{1 \quad 2} \cdot \frac{mS-2}{3} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^3 \ldots\ldots$$

ce qui est évidemment égal à

$$d^m . \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mS}$$

On tirera de là pour $\left(d+\frac{a}{m}\right)^m$ la valeur

$$d^m . \left(1 \mp \frac{1}{m.}\right)^{mS} .$$

ou bien en observant que S est égal à $\frac{a}{d}$ ou $\frac{f. a.}{d}$, on trouve enfin

$$\frac{P}{Q} = \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m.\frac{f.\alpha.}{d}}}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m.\frac{f.\alpha.}{d.}}}$$

ou bien $\frac{P}{Q} = \left\{\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m}\right\}^{\frac{f.\alpha.}{d.}}$.

désignant par r le rayon du cercle, on a $d = 2r$, ce qui donne $\frac{f.\alpha}{2r}$ à la place de $\frac{f.\alpha}{d.}$ et par suite pour $\frac{P}{Q}$ la valeur

$$\frac{P}{Q} = \left\{\left(\frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}}\right)^{\frac{m}{2}}\right\}^{\frac{f.\alpha}{r}}$$

il ne s'agit plus que de faire disparaître la quantité infinie m, pour cela développons $\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}}$ on trouve

$$\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}} = 1 + \frac{2}{m} + \frac{2}{m} + \frac{2}{m^3} + \frac{2}{m^4} \ldots \text{ etc.}$$

Or m étant infiniment grand, $\frac{2}{m^2}$, $\frac{2}{m^3}$, etc. peuvent être considérés comme nuls par rapport à m, en sorte qu'on a

$$\frac{1+\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{m}} = 1 + \frac{2}{m}$$

et par suite

$$\frac{P}{Q} = \left\{\left(1 + \frac{2}{m}\right)^{\frac{m}{2}}\right\}^{\frac{f.a}{r}}$$

et quant à $\left[1 + \frac{2}{m}\right]^{\frac{m}{2}}$ on trouve :

$$\left[1+\frac{2}{m}\right]^{\frac{m}{2}} = 1 + \frac{m}{2}\cdot\frac{2}{m} + \frac{\frac{m}{2}}{1}\cdot\frac{\frac{m}{2}-1}{2.}\left[\frac{2}{m}\right]^2$$

$$+ \frac{\frac{m}{2}}{1}\cdot\frac{\frac{m}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{2}-2}{3}\left[\frac{2}{m}\right] \ldots$$

observant que $\frac{m}{2} - 1$, $\frac{m}{2} - 2$, $\frac{m}{2} - 3$ ......
sont égaux à $\frac{m}{2}$ seulement ce qui précède devient

$$\left(1+\frac{2}{m}\right)^{\frac{m}{2}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots$$

progression décroissante dont la somme est 2.7182812, et qu'on désigne ordinairement en algèbre par e.

D'après cela la valeur de $\frac{P}{Q}$ prend définitivement la forme

$$\frac{P}{Q} = e^{\frac{f.\alpha}{r}}$$

sous laquelle on la retrouve dans tous les traités de mécanique.

Il résulte de là que le rapport augmente considérablement avec l'arc embrassé par la corde ; en effet si l'on suppose un rapport connu entre P et Q pour l'arc donné α, ce rapport étant K, on aura

$$K = e^{\frac{f.\alpha}{r}}$$

Pour un arc double il sera $e^{\frac{f.2\alpha}{r}}$ ou K^2

Pour un arc triple $e^{\frac{f.3.\alpha}{r}}$ ou K^3.

Enfin pour un arc multiple égal à $n\alpha$. K^n.

D'après cela on voit avec quelle rapidité augmente le facteur par lequel il faut multiplier Q pour avoir P, et par suite comment il est possible avec une très-petite force Q d'arrêter au moyen d'un certain nombre de tours de la corde l'effet d'une force énorme.

C'est là ce que vous aurez pu observer fréquemment en voyant manœuvrer sous l'influence d'un courant rapide et dans des passages difficiles, au moyen de gros bâtons qu'on nomme *ferrés* et d'un bout de corde fixé au navire. Ils prennent au fond du sol les points d'appui nécessaires pour leurs opérations, la corde qui fait plusieurs tours autour de l'extrémité supérieure du ferré le fixe au bateau avec une force capable d'arrêter presque subitement les mouvemens rapides partagés par une aussi grande masse, au moyen de la force musculaire d'un seul homme.

15. Nous venons de terminer à peu près tout ce qui est relatif à l'équilibre des corps solides. Je ne puis cependant finir entièrement cette portion de la mécanique sans vous faire connaître quelques considérations à la fois d'une élégance rare et d'une véritable importance dans les arts. Ces théorêmes, connus sous le nom de théorêmes de Guldin, géomètre distingué qui les fit connaître le premier, ou les reproduisit d'après Pappus, reposent sur les principes qui vous ont été dévéloppés lorsque nous avons traité des centres de gravité.

Supposons qu'une ligne droite ou courbe tourne autour d'un axe de révolution donné, et que le plan qui la contient passe aussi par cet axe de révolution. Admettons en outre que l'angle de rotation ω soit infiniment petit ; que la distance du centre de gravité de la ligne à l'axe de révolution soit x, auquel cas l'espace parcouru par ce centre de gravité sera $x.\omega$, enfin supposons qu'à chaque élément de la ligne soit appliquée une force proportionnelle à cet élément, et par suite à sa pesanteur.

Il est clair que ces diverses forces auront une seule résultante qui sera égale à la pesanteur de la ligne, et qui passera par le centre de gravité ; en sorte que cette résultante prise en signe contraire fera équilibre à l'ensemble des forces dont nous avons parlé ; d'après cela, si nous nous rappelons le théorême des vitesses virtuelles, nous verrons que la somme des produits des forces partielles multipliées chacune par l'espace parcouru par leur point d'application sera égale à la résultante multipliée par l'espace parcouru par son point d'application, c'est-à-dire à cette résultante multipliée par $x.\omega$.

Or la résultante est égale à la somme des forces partielles, et par suite proportionnelle au développement de la courbe génératrice, et d'un autre côté chaque force partielle multipliée par l'espace qu'elle parcourt donnera une valeur égale à la

surface engendrée par l'élément de courbe auquel elle est appliquée dans le mouvement général de translation.

De là résulte clairement que la somme de ces surfaces partielles, c'est-à-dire la surface entière engendrée par la courbe, sera égale au produit de la résultante ou de la longueur de la courbe multipliée par $x \cdot \omega$, espace parcouru par son centre de gravité; ainsi :

Lorsqu'une droite ou une ligne courbe tracée dans un plan tourne autour d'un axe de révolution en décrivant un arc infiniment petit ω, la longueur de la ligne étant L, la distance de son centre de gravité à l'axe de révolution étant x, l'étendue de la surface engendrée est

$$\omega \times x \times \text{L}.$$

Si à l'arc ω, s'ajoutent plusieurs autres axes très-petits ω', ω'', ω''', etc., les surfaces engendrées seront pour chacun

$$\omega' \cdot x \cdot \text{L}$$

$$\omega'' \cdot x \cdot \text{L}.$$

$$\omega''' \cdot x \cdot \text{L}. \quad \text{etc.}$$

d'où l'on conclut facilement que la surface entière S, c'est-à-dire la somme des surfaces engendrées sera

$$\begin{aligned} & \omega \,.\, x \,.\, L \\ + & \omega' \,.\, x \,.\, L \\ + & \omega'' \,.\, x \,.\, L \\ + & \omega''' \,.\, x \,.\, L \end{aligned}$$

ou $S = \left\{ \omega + \omega' + \omega'' + \omega''' + \text{etc.} \right\} \times x \,.\, L$

et si l'on appelle A la somme des arcs ω, ω', ω'', ω''', ... etc., c'est-à-dire, l'arc total parcouru par le centre de gravité dans la suite de ces mouvemens partiels, il viendra

$$S = \overline{A \,.\, x} \times L.$$

C'est-à-dire que : ***si l'on fait tourner autour d'un axe de révolution une courbe quelconque, la surface engendrée dans un tems de révolution donné sera égale à la longueur de la courbe génératrice multipliée par l'arc décrit par le centre de gravité.***

Il est facile de démontrer par la même méthode que : ***si l'on fait tourner autour d'un axe de révolution une surface plane quelconque, le volume engendré dans un tems de révolution donné, sera égal à la surface génératrice multiplié par l'arc décrit par le centre de gravité.***

C'est en cela que consiste le théorême de Guldin dont nous avons parlé : seulement il l'a présenté sous la forme suivante, un peu différente, parce qu'elle est moins générale :

I. Une surface de révolution S, engendrée par la ligne L, dont le centre de gravité est placé à une distance x de l'axe de révolution a pour mesure de sa superficie

$$S = 2\pi . x . L$$

π étant le rapport du diamètre à la circonférence, approximativement $\frac{355}{113}$.

II. Un volume de révolution V, engendré par une surface quelconque S, dont le centre de gravité est éloigné de l'axe d'une quantité x a pour expression de ce volume

$$V = 2\pi . x . S.$$

Faisons maintenant quelques applications de cette règle :

1° La surface du cercle peut être conçue comme engendrée par une droite égale à son rayon dont une extrémité est fixe et l'autre est mobile: dans cette génération particulière cherchons l'expression de cette surface.

Soit ρ le rayon du cercle, π le rapport du diamètre à la circonférence; le centre de gravité de la ligne génératrice étant placé au milieu de cette droite, décrira évidemment un cercle dont le rayon sera $\frac{1}{2}\rho$, et la circonférence $\pi . \rho$. En multipliant cette quantité par la longueur de la

droite, on trouve pour l'expression de la surface engendrée S

$$S = \rho \,.\, \pi \,.\, \rho = \pi \,.\, \rho^2$$

ce qui est, comme on sait, la vraie expression de la surface du cercle.

2° Cherchons la mesure du volume du cône : pour cela prenons un triangle rectangle d'une hauteur H et d'une base B ; faisons-le tourner autour de la droite H comme axe de révolution, nous engendrerons un cône droit dont la hauteur sera aussi H et dont la base sera un cercle du rayon B.

Cela posé, le centre de gravité du triangle générateur se trouve sur une droite parallèle à H et coupant B en deux parties dont celle près de H est le tiers de B : d'après cela la distance de ce centre à l'axe H, sera $\frac{1}{3}B$; en d'autres termes, le rayon du cercle décrit par le centre de gravité sera égal à $\frac{1}{3}B$, et la circonférence décrite par le même point sera

$$\frac{2}{3}\pi \,.\, B$$

d'où il suit qu'en multipliant cette quantité par la surface du triangle générateur ou $\frac{1}{2}HB$, on aura pour le volume V du cône

$$V = \frac{2}{3}\pi . B \times \frac{1}{2} . H . B = \frac{1}{3} . \pi . B^2$$

Or $\pi . B^2$ est la surface du cercle base du cône, donc le volume du cône est égal à sa base multipliée par le tiers de sa hauteur. Ce qui est connu par la géométrie.

3° Proposons-nous maintenant pour probléme inverse, celui-ci : trouver la distance du centre de gravité d'une demi-circonférence, au diamètre qui en termine les extrémités.

Faisons tourner la demi-circonférence autour de ce diamètre; elle engendrera une sphère dont la surface S aura pour mesure

$$S = 4 \pi . \rho^2.$$

ρ étant le rayon du cercle.

Appelons maintenant x la distance cherchée, nous aurons pour la circonférence décrite par le centre de gravité la quantité $2 . \pi . x$ et pour la demi-circonférence du cercle générateur $\pi . \rho$: multiplions ces deux quantités l'une par l'autre le produit sera égal à la surface de la sphère; ainsi

$$S = 2 . \pi . x \times \pi . \rho = 2 \pi^2 . \rho . x$$

Or nous avons aussi

$$S = 4 \pi . \rho^2.$$

donc $\quad 2 \pi^2 . \rho . x = 4 . \pi . \rho^2$

et $\quad \pi . x = 2 . \rho$

d'où $\quad x = \frac{2}{\pi} . \rho.$

4° Cherchons maintenant la distance du centre de gravité d'un demi cercle au diamètre qui le termine.

Pour cela soit x cette distance, ρ le rayon du demi cercle, puis supposons que le demi cercle tourne autour de son diamètre de manière à engendrer une sphère ; le volume V de celle-ci sera :

$$V = \frac{4}{3}\pi.\rho^3.$$

Ce volume peut encore s'exprimer d'une autre manière ; en effet, dans le mouvement de révolution le centre de gravité décrira une circonférence égale à $2.\pi.x$; d'une autre part la surface du demi cercle générateur étant $\frac{1}{2}\pi.\rho^2$, le produit de ces deux quantités donnera le volume engendré ; ainsi l'on aura :

$$V = \frac{1}{2}\pi.\rho^2 \times 2.\pi.x$$

ou

$$V = \pi^2.\rho^2.x.$$

Comparant cette équation avec la première qui est

$$V = \frac{4}{3}\pi.\rho^3$$

on trouve :

$$\pi^2 . \rho^2 . x = \frac{4}{3} \pi . \rho^3$$

$$\pi . x = \frac{4}{3} \rho$$

et $$x = \frac{4}{3} . \frac{1}{\pi} \rho.$$

Si vous comparez cette valeur avec celle obtenue par x dans le problême précédent, vous en conclurez facilement la proportion suivante :

La distance du diamètre d'un demi cercle au centre de gravité de la demi circonférence, est à la distance de ce même diamètre au centre de gravité du demi cercle, comme 2 est à $\frac{4}{3}$ ou comme 3 est à 2, théorême que nous aurions pu obtenir directement, mais qu'il m'a semblé convenable de vous offrir comme conséquence des élégans théorêmes de Guldin.

Fin de l'équilibre des corps solides.

TABLE

DE LA RÉSISTANCE A LA TRACTION DE QUELQUES CORPS.

NATURE DES CORPS	PESANT. SPÉCIFIQUE.	FORCE DE CONFUSION.	POIDS que peut supporter un pouce carré sans que la constitution du corps soit altérée.	ALLONGEMENT sous ce poids. L étant la longueur.
Cuivre battu	8.730	33000 liv.	10900 liv.	—
Fer fondu (fonte).	7.207	51000 »	15300 »	$\frac{1}{1206}$ L
Acier.	7.840	130000 »	43500 »	$\frac{1}{960}$ L
Bronze.	8.370	18000 »	6700 »	$\frac{1}{1333}$ L
Métal des canons.	8.153	30000 »	10000 »	$\frac{1}{960}$ L
Étain.	7.291	9100 »	2880 »	$\frac{1}{1600}$ L
Chêne.	0.830	—	3960 »	$\frac{1}{450}$ L
Mélèse.	0.560	—	2065 »	$\frac{1}{580}$ L
Orme.	0.544	—	3240 »	$\frac{1}{414}$ L
Pin d'Amérique.	0.460	—	3900 »	$\frac{1}{418}$ L
Sapin rouge.	0.557	—	4290 »	$\frac{1}{570}$ L
Sapin blanc.	0.470	—	3630 »	$\frac{1}{504}$ L
Brique et terre argileuse cuite.	1.841	—	275 »	0
Marbre et pierre calcaire.	2.766	200 »	200 »	$\frac{1}{1525}$ L
Cordes de chanvre.	Leur poids est de 0.04, à 0.046 livre par pied courant sur une circonférence d'un pouce: pour une circonférence de x pouces, le poids est donc x . 0,043 valeur moyenne. Pour cette même circonférence x pouces la résistance à la traction est : Pour les cordes 200 x^2 livres. Pour les cables 120 x^2 livres.			

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS CE VOLUME.

FIN DE LA TABLE.



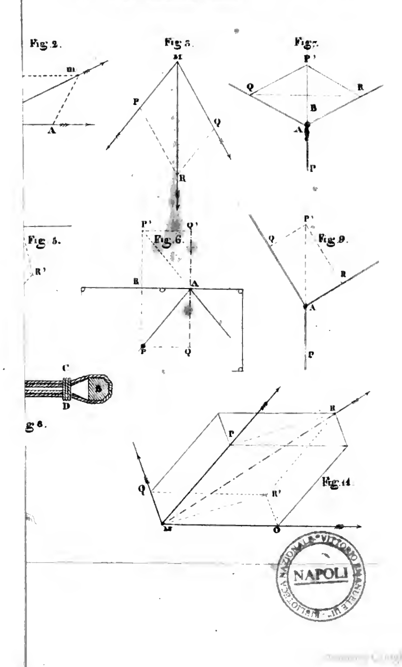

Fig. 2.
m
A
Fig. 3.
M
P
Q
R
Fig. 7.
P'
Q
R
B
A
P
Fig. 5.
R'
P'
Q'
Fig. 6.
R
A
P
Q
Q
P'
Fig. 9.
R
A
P
C
D
B
g 8.
R
P
Q
R'
Fig. 14.
M
O

Planche II 3e et 4e Livraison

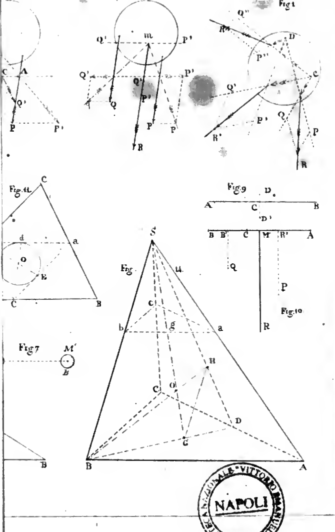


Planche III 4ème Livraison

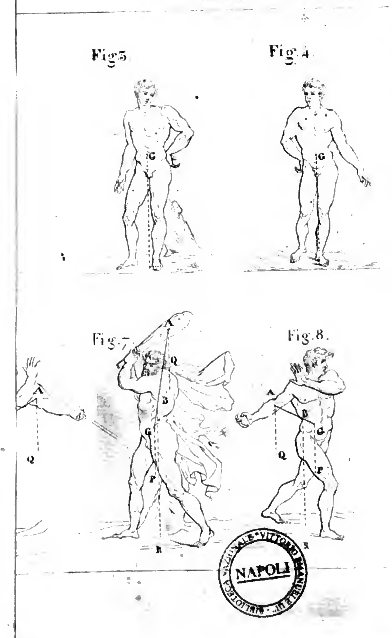
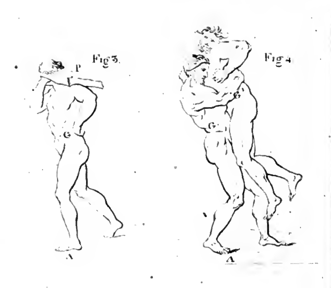
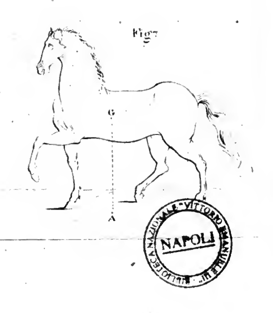


Planche IV 4me Livraison





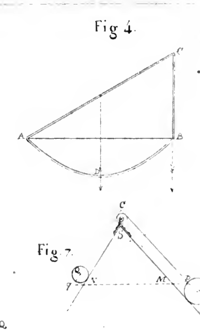
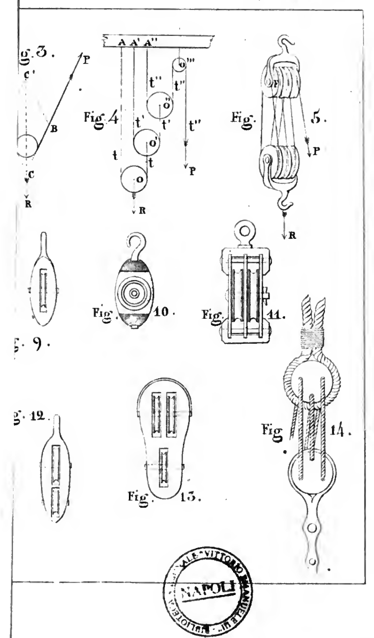

Fig 4.
Q
C
A
B
D
R
c
A
B
S
q
N
Q
Fig. 7.
C
S
Q
q
M
P
Fig. 9.


Fig. 10.
M
m
M''
m''
M'
m'



Planche VII.



g. 3.
P
c'
B
C
R
A A' A''
o'''
t''
t''
Fig. 4
o''
t'
t'
t''
o'
t
t
o
R
P
Fig. 5.
P
R
Fig. 10.
Fig. 11.
g. 9.
g. 12.
Fig. 13.
Fig 14.



Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Planche 9

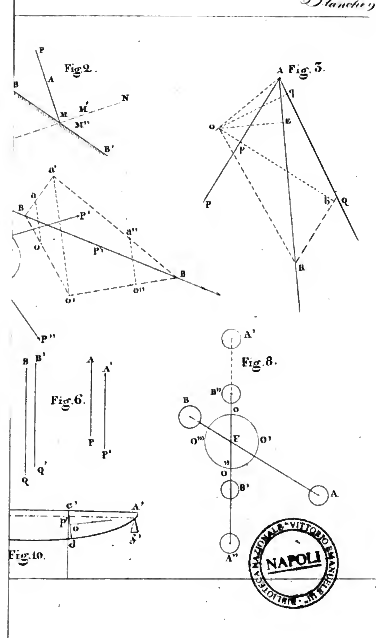


Fig. 2.
P
A
B
M
M'
M''
N
B'
A Fig. 3.
q
O
E
P
P
b
Q
B
a'
a
B
P'
a''
O
P
B
O'
O''
P''
A'
Fig. 8.
B''
B
O
O'''
F
O'
O
B'
A
A''
B
B'
A
A'
Fig. 6.
P
P'
Q'
Q
C'
A'
P
O
d
Fig. 10.

Planche 1

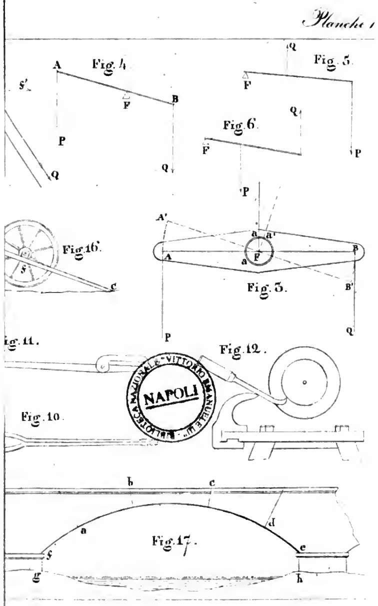
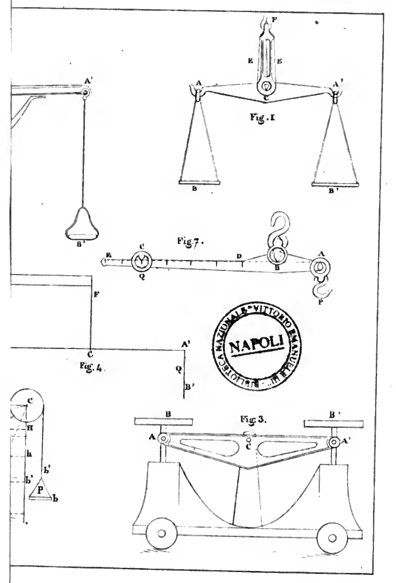


Fig. 4
A
F
B
P
Q
S'
Q
Fig. 5.
Q
F
P
Fig. 6.
Q
F
P
A'
a
a'
A
F
B
a
B'
Fig. 3.
P
Q
Fig. 16.
S
C
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 10.
b
c
a
d
Fig. 17.
f
e
g
h

Planche 11.


F
E
E
A
A'
C
Fig. I
B
B'
A'
B'
Fig. 7.
E
C
Q
D
B
A
P
F
C
Fig. 4.
A'
Q
B'
C
H
h
b'
b'
P
b
B
Fig. 3.
B'
A
C
A'



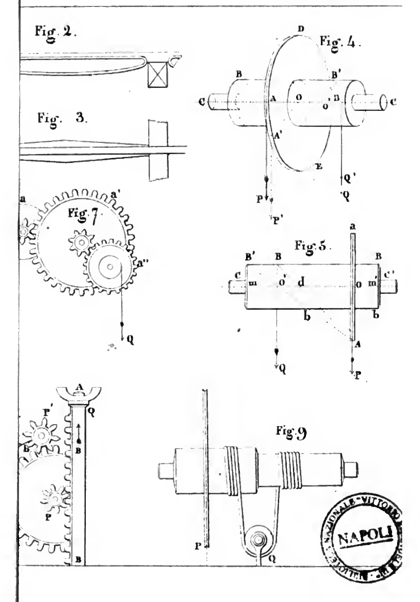

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
D
B
B'
C
A
O
O'
C
A'
E
P
P'
Q'
Q
Fig. 7
a
a'
a''
Q
Fig. 5.
a
B'
B
B
C
m
o'
d
o
m'
C'
b
b
A
Q
P
A
P'
Q
B
B
P
B
Fig. 9
P
Q



Planche 13me

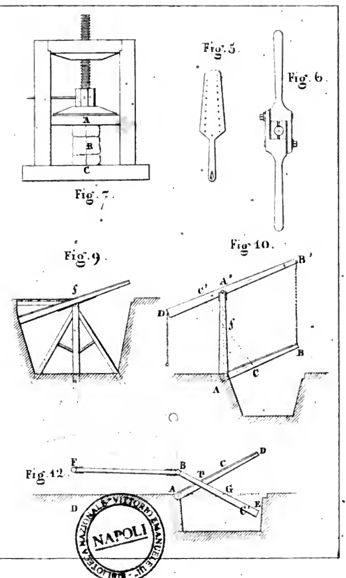
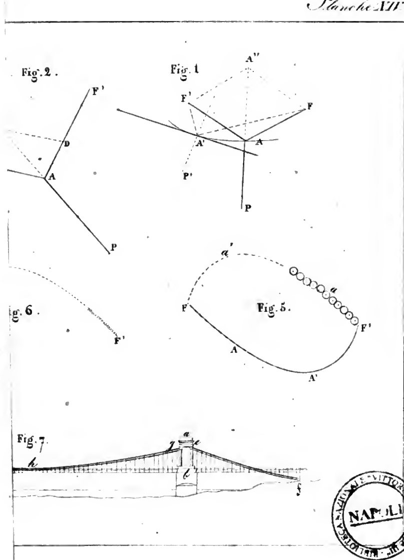
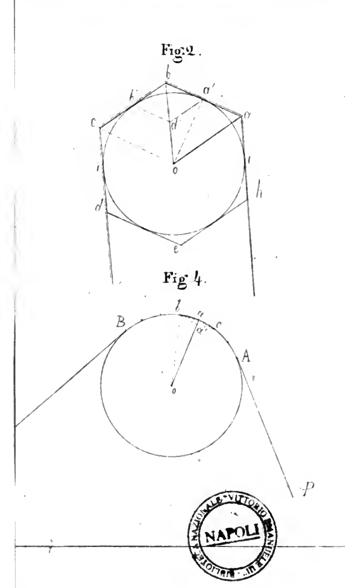
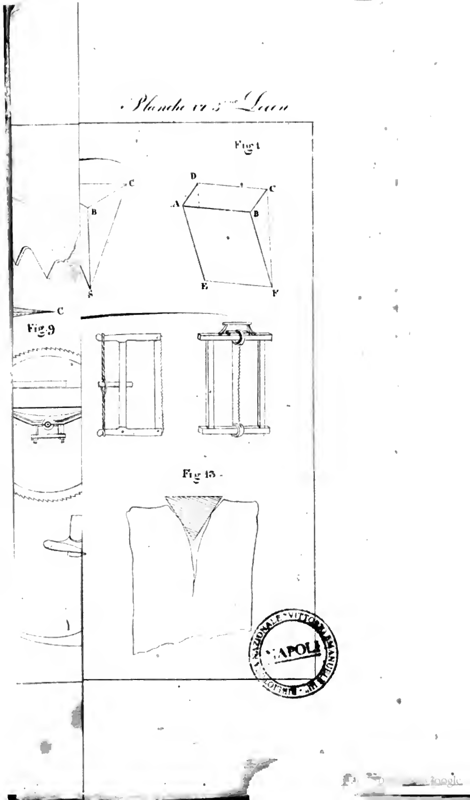


Planche XIV






Fig. 2.
b
b'
a'
c
a
d'
o
i
i
h
d
e
Fig. 4.
b
a
B
c
a'
A
o
p


Planche 11 3me Leçon
Fig 1
D
C
A
B
E
F
C
B
C
Fig. 9
Fig 13

